# 4. Der Trick mit dem Binären

Es ist allgemein bekannt: Computer rechnen nicht mit dem uns vertrauten Zahlensystem, das wir wahrscheinlich dem Umstand verdanken, zehn Finger zu besitzen. Computer rechnen binär. Auf die Frage, warum das so ist, gibt es verschiedene Antworten. Eine sehr gebräuchliche ist, dass Relais nun einmal zwei Schaltzustände haben und daher der erste funktionierende Computer – der aus diesen Bauteilen bestand – automatisch auf ein Zahlensystem festgelegt war, das mit zwei Zuständen auskommt. Einen meiner Meinung nach noch viel gewichtigeren Grund lernen Sie allerdings erst im nächsten Kapitel kennen. Vorerst wollen wir uns damit begnügen, etwas Spaß und Übung mit diesem Binärsystem zu haben.

## Uhr oder keine Uhr?

http://www.abenteuer-informatik.de/bu.html

Abbildung 4.1 zeigt vier seltsame Diagramme aus roten, grünen und blauen Punkten. Unter der Adresse am Buchrand können Sie diese sogar bewegt abrufen, die Punkte leuchten auf und verschwinden wieder. Kann es sich hier um eine Uhr (bzw. die Darstellung einer Uhrzeit) handeln?

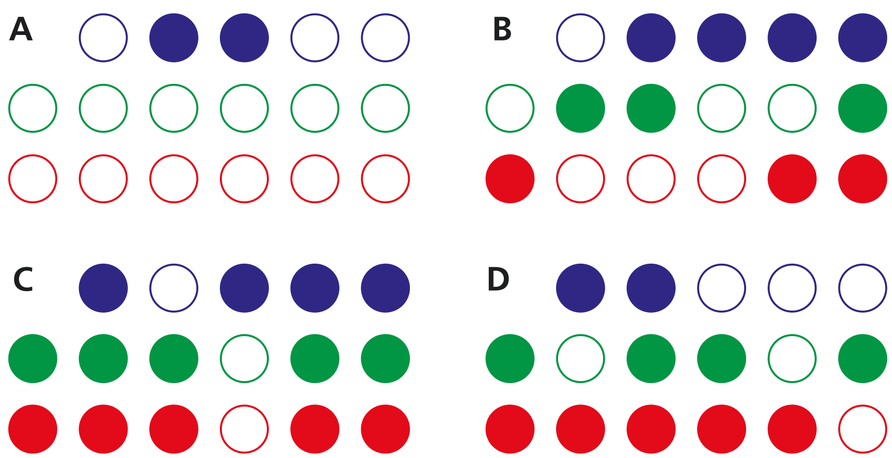
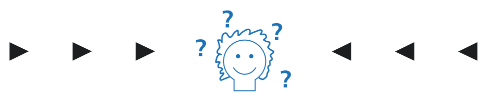



**Abbildung 4.1**
Uhren?

**Rufen Sie die Internetseite auf und suchen Anhaltspunkte, die dafür sprechen.**



Es spricht schon einiges dafür: Die roten Punkte wechseln ihren Zustand im Sekundentakt, die grünen minütlich und – auch wenn Sie etwas Geduld brauchen, um das festzustellen – die blauen jede Stunde. So weit entspricht das Verhalten offenbar einer Uhr. Eine Uhr zählt allerdings Sekunden, Minuten und Stunden, und dieser Zählvorgang wird nicht auf den ersten Blick klar.

Daher machen wir noch ein zweites Experiment: Basteln Sie noch die gelben Binärkarten aus Vorlage 4.K1 oder dem Bastelbogen. Die Vorderseite zeigt dabei jeweils eine Zahl von Punkten, die Rückseite ist leer. Wenn Sie die Kopiervorlage nutzen, können Sie jeweils ein Rechteck aus einem Quadrat mit Punkten und einem ohne Punkte ausschneiden, es an der Kante zwischen den Quadraten sauber knicken und dann zusammenkleben oder laminieren.

**Versuchen Sie, die Karten nacheinander so auf den Tisch zu legen, dass diese insgesamt 13 Punkte zeigen. Versuchen Sie auch andere Zahlen darzustellen. Bekommen Sie 25 Punkte, 44 und auch 68?**

Sicher hatten Sie keine Schwierigkeiten mit 13, 25 und 44 Punkten. Da die Gesamtzahl aller Punkte auf den Kärtchen aber nur 63 beträgt, sind 64 oder mehr unmöglich darzustellen. Abbildung 4.2 zeigt 44 Punkte.

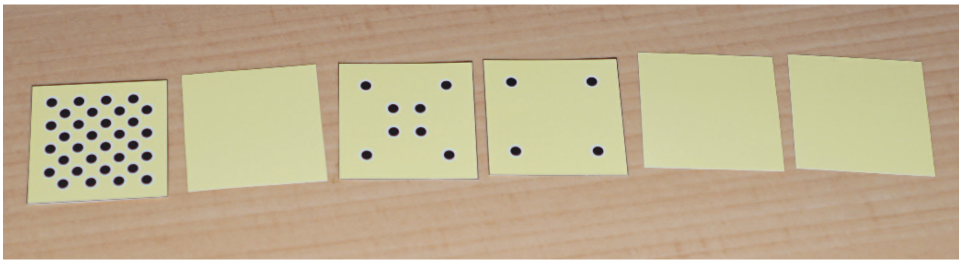


**Abbildung 4.2**
Die Karten zeigen 44 Punkte.

**Nun wollen wir konsequent erforschen, ob auch wirklich alle möglichen Zahlen mit den Kärtchen gelegt werden können. Dafür zählen wir durch, legen also nacheinander alle Zahlen 1, 2, 3 usw. bis zur 63. Bitte sortieren Sie dabei die Karten nach der Zahl der aufgedruckten Punkte – von 32 bis 1 absteigend, unabhängig davon, ob diese gerade sichtbar sind oder nicht. Achten Sie beim Zählen darauf, wie oft Sie die einzelnen Karten jeweils umdrehen.**

Sie haben es geschafft? Super! Und wie oft wurde nun die 1er-Karte umgedreht? Genau: jedes Mal. Und die mit den zwei Punkten? Jedes zweite Mal. Und die mit den vier Punkten? Jedes dritte Mal? Nein – jedes vierte Mal!

Wenn Sie nun wieder die blauen, grünen und roten Punkte vom Anfang betrachten, stellen Sie fest, dass auch diese nach dem gleichen Schema wechseln: ganz rechts jedes Mal, links davon jedes zweite Mal, dann jedes vierte usw.

Wenn diese Diagramme nun nach dem gleichen Schema „ticken“ wie das Zählen mit den Binärkarten, kann man vermuten, dass diese auch nach dem gleichen Schema zählen. Versuchen wir also, den Punkten Wertigkeiten zuzuordnen, die der Anzahl an Punkten auf den entsprechenden Karten entsprechen, von rechts nach links also 1, 2, 4, 8, 16, 32.

**Können Sie nun die aktuelle Uhrzeit aus der Webseite ablesen? Welche Uhrzeiten verstecken sich in Abbildung 4.1? Finden Sie die falsche Uhrzeit?**

An der Binäruhr erkennen Sie, dass man eigentlich gar keine Punkte benötigt, wenn man die Wertigkeit konsequent mit der Position verknüpft. Genau dasselbe gilt ja auch im uns gewohnten Dezimalsystem: Die Ziffer 4 ganz rechts steht einfach nur für eine Vier, während sie eine Position links davon bereits Vierzig repräsentiert.

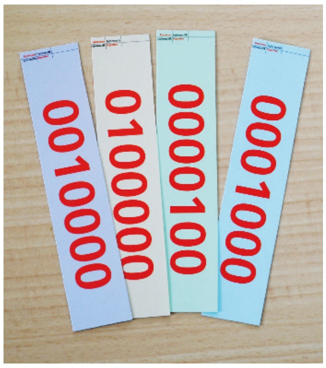
Auf diese Weise können Sie auch Abbildung 4.1 interpretieren: Uhrzeit A hat von den blauen Stunden die Punkte für 4 und für 8 eingeschaltet, zeigt also 12:00:00 Uhr. B zeigt 15:25:35. Uhrzeit C ist mit 23:59:59 ganz kurz vor Mitternacht. Teil D zeigt allerdings mit 24:45:62 eine Uhrzeit, die es so normalerweise gar nicht gibt.

„Punkt nicht gesetzt" und „Punkt gesetzt" können wir mit allem ersetzen, was zwei sichtbar unterschiedliche Zustände hat. Ein besonderer Spaß ist zum Beispiel das binäre Zählen mit den Fingern. An einer Hand schaffen wir es auf diese Weise, mit den fünf Fingern von 0 bis 31 zu zählen. Im Titelbild dieses Kapitels sehen Sie die entsprechenden Fingerstellungen. Mit beiden Händen kommen wir immerhin bis 1023. Abbildung 4.3 zeigt zum Beispiel 879.

Stellen wir die Zustände mit den Symbolen 0 und 1 dar, befinden wir uns in der üblichen Notation für das Binärsystem, die auch in den folgenden Kapiteln verwendet wird.

## Zaubern mit Informatik

Verschiedene verblüffende Zauber- und Gedächtniskunststücke beruhen darauf, dass man Zusammenhänge in unterschiedlichen Zahlensystemen unterschiedlich gut wahrnehmen kann. Abbildung 4.K2 ist die Kopiervorlage für sieben Karten, die jeweils Zahlen zwischen 1 und 100 enthalten. Die Karten sind zum Ausschneiden auch auf dem Bastelbogen zu finden.




Wenn Sie die Bastelbögen verwenden, können Sie die richtige Zahl sogar ermitteln, obwohl Sie nur die Rückseiten zu sehen bekommen, denn dort steht die kleinste Zahl nochmals binär und Sie haben nun doch kein Problem mehr im Entziffern von Binärzahlen, oder?
Im Beispiel oben kommen Sie ganz leicht auf die Zahl 0111100 binär, was 60 dezimal entspricht.

Um den Trick zu erklären, nehmen wir einmal an, Sie möchten mit Ihrer Zauberkunst Margit beeindrucken. Bitten Sie Margit, sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 100 auszudenken, diese jedoch nicht laut auszusprechen. Margit bekommt nun die sieben Zauberkarten in die Hand und soll Ihnen nur die zurückgeben, die die entsprechende Zahl enthält. Alternativ lassen Sie Margit auch nur auf die Karten zeigen oder die entsprechende Farbe nennen.

Ohne Zögern können Sie nun die Zahl nennen und der Trick hat funktioniert.

Ach so? Sie möchten auch noch wissen, wie Sie das Kunststück zuwege bringen? Also gut: Nehmen Sie von allen bezeichneten Karten die Zahl links oben, also die kleinste Zahl, und addieren Sie diese – fertig.

**Führen Sie den Trick ein paar Mal vor und versuchen Sie zu ergründen, warum er funktioniert. Kleiner Tipp: Es hat etwas mit dem Binärsystem zu tun.**

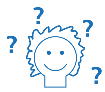
► ► ►  ◄ ◄ ◄

Abbildung 4.3 zeigt noch einmal die Zahlen auf den Karten – diesmal aber im Binärsystem. Sie erkennen, dass auf der gelben Karte alle Zahlen stehen, deren letzte Stelle, also die 1er-Stelle, „eingeschaltet" bzw. 1 ist. Auf der orangen Karte stehen alle Zahlen mit eingeschalteter 2er-Stelle. Grün steht für die 4er-Stelle, Blau für die 8er-Stelle usw.

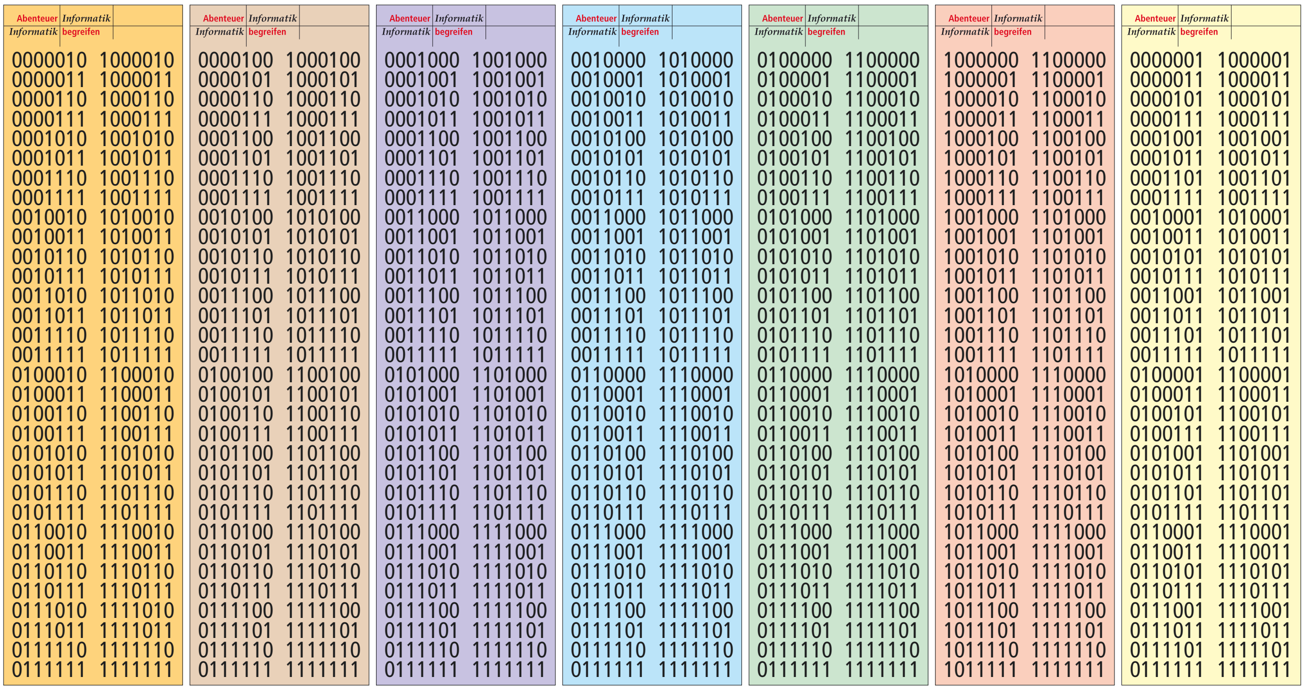



**Abbildung 4.3**
Zauberkarten mit Zahlen im Binärsystem

Bei der kleinsten Zahl jeder Kategorie sind dann selbstverständlich alle anderen Stellen „ausgeschaltet“ oder 0. Jetzt können Sie sich vorstellen, dass eine Zahl „zusammengesetzt“ werden kann, indem man alle Zahlen, die jeweils eine 1 an den entsprechenden Stellen repräsentieren, zusammenzählt.

Wenn Sie immer noch unsicher sind, nehmen Sie einfach an, die Zahlen in Abbildung 4.3 seien Dezimalzahlen, die eben nur 0 und 1 enthalten. Die Zahlen sind also Eins, Zehn, Elf, Hundert, Hunderteins, Hundertzehn, Hundertelf, Tausend usw.

Wenn Margit sich nun die Zahl 100101 ausdenkt, findet Sie diese auf der gelben, der grünen und der braunen Karte. Die Zahlen oben links stellen dann sozusagen die „Komponenten“ der einzelnen Stellen dar und addieren sich wieder zur ganzen gesuchten Zahl.

## Was steckt dahinter?

Jedes Zahlensystem beruht letztlich auf dem Zählen. Dazu kann man zum Beispiel die Finger benutzen, womit man bis 10 kommt (oder eben zehn unterschiedliche „Ziffern“ 0 bis 9 darstellt). Das alte Volk der Maya hat wahrscheinlich zusätzlich zu den Fingern noch die Zehen genutzt und daher ein 20er-System entwickelt.

In jedem Fall gibt es eine begrenzte Zahl auf diese Weise darstellbarer Ziffern – um darüber hinaus weiter zählen zu können, muss man sich etwas einfallen lassen. In additiven Systemen wie dem römischen wurden dann spezielle Zahlzeichen für größere Zahlen entwickelt, also z. B. X für 10 oder C für 100. Auch dann ist der Vorrat aber irgendwann einmal erschöpft. Daher gehen Stellenwertsysteme wie unser Dezimalsystem einen anderen Weg: Ist beim Zählen die Zahl der Ziffern erschöpft, erhöht man die Ziffer links davon um eins und beginnt dafür bei der rechten Ziffer wieder bei 0. Ist man dort ebenfalls bei der letzten Ziffer angekommen, geht man noch eine weitere Stelle nach links usw.

Für unser bekanntes Dezimalsystem ist das Ihnen selbstverständlich geläufig: Das Zählen funktioniert mit den uns bekannten Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – nun sind diese erschöpft und wir müssen die Stelle links davon erhöhen. Diese ist nicht vorhanden, wir nehmen aber implizit eine unerschöpfliche Anzahl von Nullen an. Daher geht es weiter mit 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 und wir müssen erneut die linke Ziffer erhöhen, so dass wir auf 20 kommen usw.

Auf diese Weise erhöhen wir die Stelle ganz rechts jedes Mal, die Stelle links davon jedes 10te Mal, die Stelle links davon jedes 100te Mal usw. Wir sagen dazu 1er-, 10er,- und100er-Stelle. Der Wert der Stellen kann daher mit Potenzen der Basis unseres Zahlensystems, also Potenzen von 10 beschrieben werden:

$$dcba = d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1 = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$$

Das Herumreiten auf Ihnen längst bekannten Fakten war wichtig, um zu zeigen, dass im Binärsystem im Prinzip alles genau gleich abläuft. Basis ist hier allerdings die 2. Daher gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Beim Zählen gehen diese Ziffern also viel schneller aus und man muss viel früher mit dem sogenannten „Übertrag" die Stelle links davon erhöhen:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000 usw.

Die Wertigkeiten der Stellen ergeben sich dann genau so wie beim Dezimalsystem, aber natürlich auf Basis der 2 – binär ausgedrückt 10. Um die dezimale 10 von der binären 10 zu unterscheiden, wird manchmal die Zahlenbasis (dezimal ausgedrückt) als Index an die Zahl gehängt:

$$2_{10} = 10_2$$

Oft wird dabei der Index 10 für das Dezimalsystem auch weggelassen. Die Rechnung mit den Wertigkeiten der Stellen von oben gilt dann genauso für das Binärsystem:

$$dcba = d \cdot 1000_2 + c \cdot 100_2 + b \cdot 10_2 + a \cdot 1_2 = d \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + a \cdot 2^0$$

In dieser Rechnung können Sie dann auch die Anzahl von Punkten auf den gelben Kärtchen von Abbildung 4.K1 erkennen: Jeweils die Zweierpotenzen.

Da im Prinzip alles so ist, wie wir es von unserem „normalen" Zahlensystem kennen, aber eben nur mit zwei Ziffern, funktionieren auch (fast) alle bekannten Arten zu rechnen und ergeben die gleichen Resultate. Sie müssen sich lediglich daran gewöhnen, den Übertrag beim Addieren schon etwas früher zu nutzen. Für die schriftliche binäre Addition, die Sie in Abbildung 4.4 sehen, gilt $0+0=0; 0+1=1; 1+0=1; 1+1=10$. Bereits bei 1+1 gibt es also einen Übertrag.

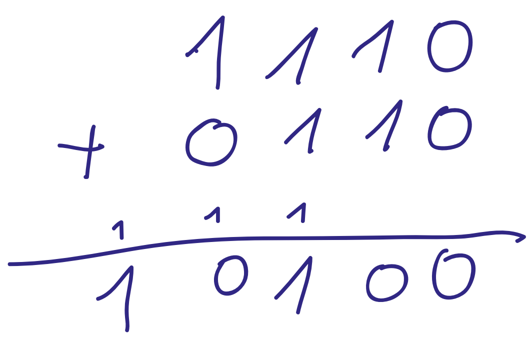



**Abbildung 4.4**
Addieren im Binärsystem mit Überträgen

## Resümee

Binärzahlen sind keine fremde Welt, sondern lediglich eine andere Repräsentation der uns bestens bekannten Zahlen durch die Kombination von nur zwei unterschiedlichen Symbolen.

Manchmal ist es nötig, die Sichtweise zu verändern, um bestimmte Sachverhalte besser zu erkennen. In unserem Fall war es auf diese Weise möglich, einen bekannten Zaubertrick zu erklären.

Noch nicht wirklich geklärt ist, warum Binärzahlen und Informatik fest zusammengehören. In den folgenden Kapiteln werden wir daher immer wieder auf die binäre Darstellung zurückkommen, um die Informatik besser zu verstehen und dieser Sache auf den Grund zu gehen.

**Abbildung 4.K1**
Punktkarten

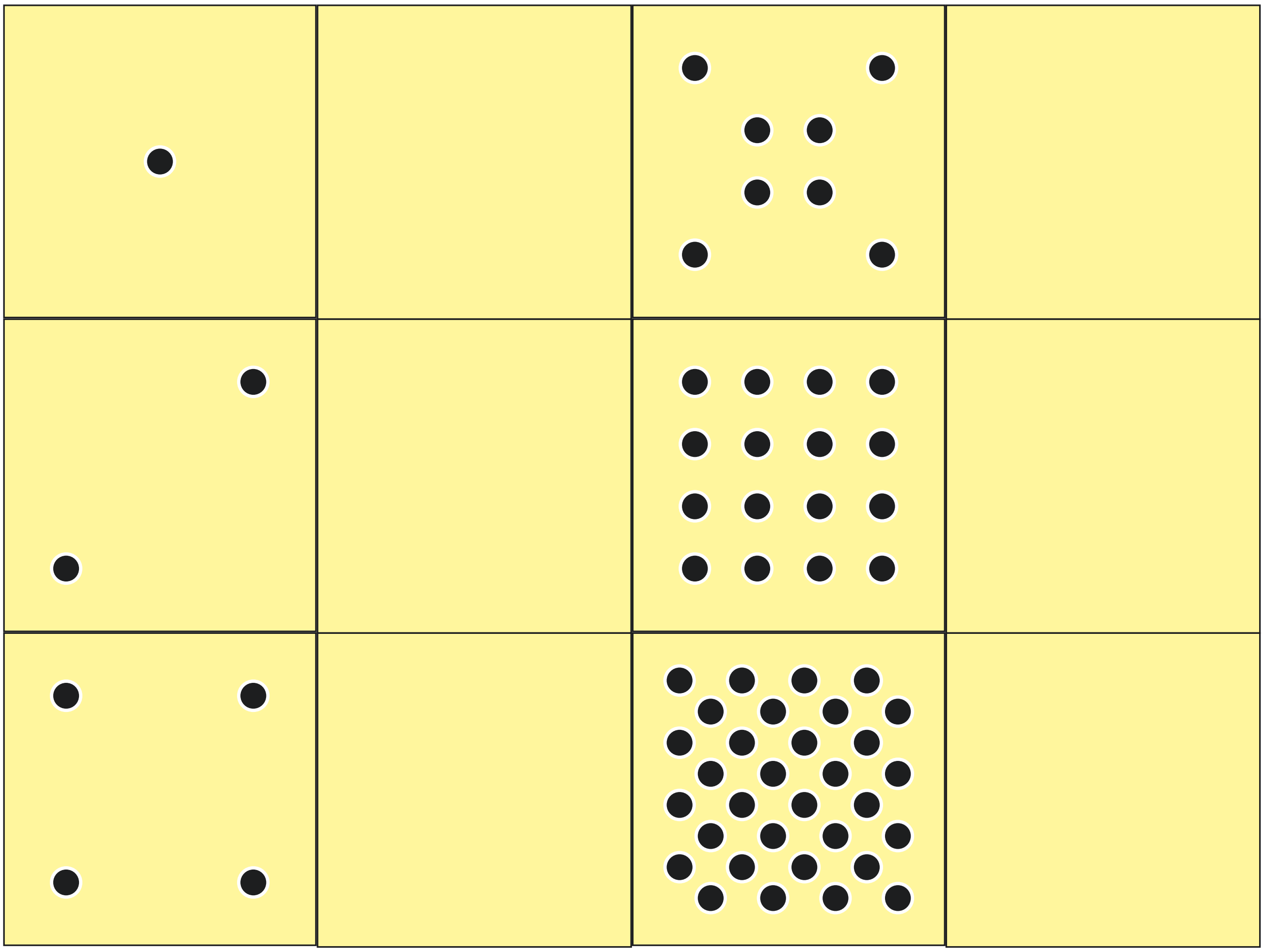


**Abbildung 4.K2**
Zauberkarten