Dr. Kai-Friederike Oelbermann
TH 2 Mathematik
Landesstudienkolleg Hochschule Anhalt

Herbstsemester 2017
Stand: 12. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen: Grundrechenoperationen

1.1 Symbole

Zahlenmengen Es seien

- $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

Intervalle Seien $a, b \in \mathbb{R}$

- $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b
- $(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$ offenes Intervall ab a
- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall von a bis b
- $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ linksseitig abgeschlossenes und rechtsseitig offenes Intervall von a bis b
- $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$ abgeschlossenes unbeschränktes Intervall ab a

Logische Verknüpfungen Eine *Aussage* ist ein beschriebener Sachverhalt, der entweder den Wahrheitswert *wahr* und *falsch* annimmt. Beispiele: p: Köthen ist eine Stadt in China ($p =$ falsch), q: Köthen ist eine Stadt in Deutschland ($q =$ wahr).

Seien p und q zwei Aussagen. Folgende Verknüpfungen sind definiert:

- $\neg p$ Negation (nicht p)
- $p \wedge q$ Konjunktion (p und q)
- $p \vee q$ Disjunktion (p oder q)
- $p \Rightarrow q$ Implikation (aus p folgt q)
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz (p ist wahr genau dann, wenn (g.d.w.) q wahr ist)

Mengen und Teilmengen Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Die zu einer Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge. Mengen werden im Allgemeinen mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots C$ und ihre Elemente mit kleinen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnet. Wir schreiben:

- $a \in A$ (a ist ein Element der Menge A)
- $a \notin A$ (a ist kein Element der Menge A)

Elemente von Mengen werden durch geschweifte Klammern $\{\ldots\}$ zusammengefasst. Dies geschieht entweder durch

- *aufzählende Darstellung*, z.B. $A = \{K, o, t, h, e, n\} = \{o, t, K, e, n, h\}$ oder
- *beschreibende Darstellung*, z.B. $A : \{x \mid x$ ist ein Buchstabe des Wortes 'Koethen'$\}$

Für Teilmengen schreiben wir

- $A \subseteq B$ Teilmenge (A ist eine Teilmenge von B)
- $A \subsetneq B$ echte Teilmenge (A ist eine echte Teilmenge von B)
- $A \supseteq B$ Obermenge (A ist eine Obermenge von B)
- $A \supsetneq B$ echte Obermenge (A ist eine echte Obermenge von B)
- $A = B$ (A und B besitzen die gleichen Elemente)

- $\emptyset$ leere Menge ($\emptyset = \{\}$)

Mengeoperationen
- $A \cup B$ Vereinigung ($A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$)
- $A \cap B$ Durchschnitt ($A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$)
- $A \backslash B$ Differenz ($A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$)

Prädikatenlogik *Quantoren* sind logische Zeichen, die der abkürzenden Schreibweise in der Aussagenlogik dienen.

- $\forall$ Allquantor (für alle) (z.B. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N}$)
- $\exists$ Existenzquantor (es existiert) (z.B. $\exists a, b \in \mathbb{Z} : a/b \notin \mathbb{Z}$)

Eine Aussage korrekt zu verneinen ist nicht immer einfach. Sei p: 'Die Straße ist nass' eine Aussage. Dann gilt $\neg p$: 'Die Straße ist nicht nass'. Aber Achtung, für q : 'Die Straße ist trocken' gilt $p \neq q$.

Seien p, q Aussagen und A, B Mengen:

- $\neg\neg A := \neg(\neg A) = A$
- $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $\neg(\forall a \in A : a \in B) = \exists a \in A : a \notin B$
- $\neg(\exists a \in A : a \in B) = \forall a \in A : a \notin B$

1.2 Mathematik in Deutschland – Die Wahlen zum 19. Deutschen Bundestag

Am 24. September 2017 fand die Wahl zum 19. Deutschen Bundestag statt. Da steckt viel Mathematik drin! Wir betrachten die Wahl aus dem Jahr 2013:

Wahlberechtigte: Ca. $61,5$ Millionen Wählerinnen und Wähler. Wahlberechtigt sind alle Bürgerinnen und Bürger, die über die deutsche Staatsbürgerschaft verfügen und mindestens 18 Jahre alt sind.

Das Komma in $61,5$ nennen wir *Dezimaltrennzeichen*.

Es waren exakt 61 046 900 Wahlberechtigte. Der kleine Abstand dient der *Zifferngruppierung* und damit der besseren Lesbarkeit. Handschriftlich setzt man oft einen Punkt.

Stimmen: Insgesamt haben 44 309 925 Wähler ihr Stimmrecht ausgeführt; 43 625 041 gültige Stimmen wurden abgegeben. Um die Anzahl der ungültigen Stimmen zu bestimmen, führen wir eine *Subtraktion* durch:

Wähler		44 309 925	Minuend
gültige Stimmen	−	43 625 041	Subtrahend
ungültige Stimmen	=	684 834	Differenz

Sperrklausel: Es werden nur jene Parteien bei der Sitzzuteilung berücksichtigt, die mehr als 5% der gültigen Stimmen erhalten haben: $100\% \mathrel{\hat{=}} 43\,625\,041$. Daraus folgt, dass nur Parteien, die mehr als $\lceil 43\,625\,041/(100/5)\rceil = \lceil 2\,181\,252,1\rceil = 2\,181\,253$ Stimmen erhalten haben, berücksichtigt werden. Die *Rundungsfunktion* $\lceil\cdot\rceil$ wird auch *obere Gaußklammer* genannt.

Ergebnis Fünf Parteien haben die 5%-Hürde geschafft. Die Sitzzuteilung erfolgt über die *Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Lagüe/Schepers))*:

Partei	Zweitstimmen	Quotient	DivStd
CDU	14 921 877	255.4	255
SPD	11 252 215	192.6	193
Linke	3 755 699	64.3	64
Grüne	3 694 057	63.2	63
CSU	3 243 569	55.52	56
Summe (Divisor)	36 867 417	(58 420)	631

Wir betrachten exemplarisch die CDU: Zur Bestimmung der Sitzzahl wird der *Quotient* aus Zweitstimmen (*Zähler*) und dem Divisor (*Nenner*) gebildet: $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{14\,921\,877}{58\,420} = 255.4$ Da es in Deutschland keine 0.4-fachen Abgeordneten gibt, wird der Quotient gemäß der Standardrundung auf 255 gerundet.

Wahlsystem zum Deutschen Bundestag: Der vollständige Rechenweg ist viel komplexer, da die Wähler zwei Stimmen abgeben dürfen. Diese werden getrennt nach den Bundesländern ausgewertet. Informationen zum Wahlsystem finden Sie u.a. auf www.wahlrecht.de/.

1.3 Grundrechenoperationen in den natürlichen Zahlen

1.3.1 Die Menge der natürlichen Zahlen

Definition 1 (Menge der natürlichen Zahlen)**.** *Die Menge* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ *heißt die* Menge der natürlichen Zahlen. *Ferner definieren wir* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.3.2 Grundrechenoperationen in der Menge der natürlichen Zahlen

Wir kommen nun zu den Grundrechenoperationen in $\mathbb{N}$. Dazu seien $m, n, p, s, d, \in \mathbb{N}$.

Addition: $m + n = s$ $\quad m, n$ heißen *Summanden*, s heißt *Summe*. Die Addition ist in der Menge $\mathbb{N}$ uneingeschränkt durchführbar:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \quad m + n \in \mathbb{N}.$$

Multiplikation: $m \cdot n = p$ $\quad m, n$ heißen *Faktoren*, p heißt *Produkt*. Wir nennen p auch ein Vielfaches von m bzw. n (zum Beispiel ist 20 das Vierfache von 5 bzw. das Fünffache von 4). Die Multiplikation ist in der Menge $\mathbb{N}$ uneingeschränkt ausführbar:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \quad m \cdot n \in \mathbb{N}.$$

Einen gemeinsamen Faktor kann man *ausklammern*:

$$mn + nk = n(m + k).$$

Terme mit gemeinsamen Faktoren kann man *zusammenfassen*:

$$3xy + 4xy = xy(3 + 4) = 7xy.$$

Vergleichen: Die Menge $\mathbb{N}$ erlaubt eine *totale Ordnung*. Für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt

$m \leq m$	Reflexivität
$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$	Antisymmetrie
$m \leq n \wedge n \leq p \Rightarrow m \leq p$	Transitivität
$m \leq n \vee n \leq m \Rightarrow m = n$	Totalität

Ferner gilt

$$\begin{aligned} m = n \quad & \neg(n = n) \Longleftrightarrow m \neq n \\ m > n \quad & \neg(m > n) \Longleftrightarrow m \leq n \\ m < n \quad & \neg(n < n) \Longleftrightarrow m \geq n. \end{aligned}$$

Subtraktion: $m - n = d$ $\quad m$ heißt *Minuend*, n heißt Subtrahend und d heißt *Differenz*. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Sie ist in $\mathbb{N}$ nicht uneingeschränkt ausführbar:

$$\begin{aligned} &\neg(\forall m, n \in \mathbb{N} : m - n \notin \mathbb{N}) \\ \Longleftrightarrow\ &\exists m, n \in \mathbb{N} : m - n \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Inbesondere gilt $\forall m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \neq \mathbb{N}$.

Division: $m : n = m/n = q$ $\quad m$ nennen wir *Dividend*, n *Divisor* und q heißt *Quotient*. Die Division durch 0 ist nicht definiert. Falls $q \in \pm\mathbb{N}$, dann heißt n *Teiler* von m. Schreibweise: $n \mid m$ (sprich: n teilt m)

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : n \mid m \Longleftrightarrow \exists q \in \pm\mathbb{N} : n \cdot q = m.$$

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Sie ist wie die Subtraktion nicht uneingeschränkt ausführbar:

$$\neg(\forall m, n \in \mathbb{N} : m/n \in \mathbb{N}) \Longleftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : m/n \notin \mathbb{N}.$$

Wenn zwei natürliche Zahlen keine gemeinsamen Teiler größer als 1 haben, dann heißen sie *teilerfremd*.

1.4 Grundrechenoperationen in den ganzen und den rationalen Zahlen

1.4.1 Die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen

Wie oben gesehen, reichen die natürlichen Zahlen zum Rechnen oft nicht aus. Daher müssen mathematischen Überlegungen häufig unterschiedliche Zahlenbereiche zugrunde gelegt werden.

Definition 2 (Menge der ganzen Zahlen)**.** *Die Menge der ganzen Zahlen ist definiert durch* $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \pm\mathbb{N}_0$.

In der Menge der ganzen Zahlen ist neben der Addition und der Multiplikation die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}: \quad m - n \in \mathbb{Z}.$$

Definition 3 (Menge der rationalen Zahlen)**.** *Die* Menge der rationalen Zahlen *ist definiert durch* $\mathbb{Q} := \{z \mid x = a/b, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Rationale Zahlen sind nicht eindeutig darstellbar, z.B. $z = 1/7 = 8/56 = \cdots$. Man vereinbart daher eine Darstellung $z = a/b$, wobei a und b teilerfremd sind. Ferner sind rationale Zahlen als endliche Dezimalbrüche (z.B. $9/4 = 2,25$) oder unendliche periodische Dezimalbrüche (z.B. $z = 1/3 = 0,333\dots$) darstellbar.
In der Menge der rationalen Zahlen ist neben der Addition, der Multiplikation und der Subtraktion die Division uneingeschränkt durchführbar (nur nicht die Division durch 0!):

$$\forall m, n \in \mathbb{Q}: \quad m/n \in \mathbb{Q}.$$

Für die obigen Mengen gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

1.4.2 Eigenschaften der Addition und der Multiplikation

Für die Addition und die Multiplikation gelten die Eigenschaften der

Kommutativität	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Distributuvität	$a(b + c) = ab + bc$	

Satz 4. *Seien* $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. *Ein Produkt ist gleich null genau dann, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist,*

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad b = 0.$$

2. *Ein Bruch ist genau dann null, wenn der Zähler null ist,*

$$\frac{a}{b} = 0 \Longleftrightarrow a = 0.$$

Beispiel: Wir wollen die Nullstellen des Polynoms $p(x) = (x - 5)(x^2 - 9)$ berechnen:

$$\begin{aligned} &(x - 5)(x^2 - 9) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x - 5 = 0 \vee x^2 - 9 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = -3. \end{aligned}$$

1.4.3 Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen

Als nächstes kommen wir zu den Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$:

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ für alle $b, c \neq 0$.

Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$ für alle $b, c \neq 0$.

Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ für alle $b \neq 0$.

Division: $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$ für alle $b, c \neq 0$. Wir nennen d/c den *Kehrwert* von c/d. Man beachte bei Doppelbrüchen

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b/c} = \frac{ac}{b}$$

1.4.4 Summen- und Produktzeichen

Summen mit mehreren Summanden werden oftmals mit Hilfe des *Summenzeichens* geschrieben.

Definition 5 (Summenzeichen)**.** *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige rationale Zahlen. Für die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definieren wir*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Beispiele:

1. $\sum_{k=0}^{4}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
2. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k-1}k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$

Satz 6. *Für das Summenzeichen gelten folgende Rechenregeln:*

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

ACHTUNG: Es gilt *nicht*: $\sum_{i=1}^{n}(a_k \cdot b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_k$, denn es ist

$$\sum_{i=1}^{n}(a_k \cdot b_k) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \text{ und}$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_k = (a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n).$$

Analog zum Summenzeichen definieren wir das Produktzeichen.

Definition 7 (Produktzeichen)**.** *Für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist das* Produktzeichen *definiert durch*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_n \cdots a_n.$$

1.5 Grundrechenoperationen in den reellen und komplexen Zahlen

Wir haben oben gesehen, dass für die vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) der Zahlenbereich der rationalen Zahlen ausreichend ist. Wir werden als nächstes das Potenzieren betrachten und werden schnell sehen, dass für die zwei möglichen Umkehrungen (Wurzelziehen und Logarithmieren) der Zahlenbereich erneut erweitert werden muss.

1.5.1 Potenzen mit natürlichem Exponenten und deren Umkehrungen

Definition 8 (Potenzen mit natürlichem Exponenten)**.** *Seien $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$. Das n-fache Produkt der Zahl a heißt n-*te Potenz *von a:*

$$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}}$$

Ferner definieren wir $a^0 := 1, a^{-n} := 1/a^n$.

Die Potenzrechnung hat zwei Umkehrungen:

1. Die Auflösung $b^n = a$ nach b führt zur *Wurzelrechnung*: $b = \sqrt[n]{a}$
2. Die Auflösung $b^n = a$ nach n führt zur *Logarithmenrechnung*: $n = \log_b a$

Um uneingeschränkt aus rationalen Zahlen $a \in \mathbb{Q}$ die Wurzel ziehen und den Logarithmus bilden zu können, sind zwei Erweiterungen des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}$ notwendig:

- Die Menge der reellen Zahlen (Abschnitt 1.5.2) sind notwendig, um zum Beispiel die Zahl $\sqrt{2}$ zu definieren.
- Die Menge der komplexen Zahlen (Abschnitt 1.5.3) sind notwendig, um zum Beispiel die Zahl $\sqrt{-1}$ zu definieren.

1.5.2 Die Menge der reellen Zahlen

Die Wurzel einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$, für die keine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ existiert mit $a^2 = z$,

$$\nexists a \in \mathbb{Q} : a^2 = z \iff \forall a \in \mathbb{Q} : a^2 \neq z,$$

ist keine rationale Zahl. Zum Beispiel existiert keine rationale Zahl z mit $z^2 = 2$, also $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$.

Definition 9 (Menge der reellen Zahlen)**.** *Die nichtrationalen Zahlen heißen* irrationale Zahlen*. Sie sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche. Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden sie die* Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} := \{z \mid z \textit{ ist ein Dezimalbruch}\}.$$

Die reellen Zahlen lassen sich den Punkten einer Zahlengeraden zuordnen und bedecken diese lückenlos.

1.5.3 Die Menge der komplexen Zahlen

Um auch aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen zu können, erweitern wir den Zahlenbereich abermals. Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$x^2 + 4 = 0 \qquad x_{1/2} = \pm\sqrt{-4}.$$

Da $\sqrt{-4}$ in den reellen Zahlen nicht definiert ist, hat die obige Gleichung keine Lösung in $\mathbb{R}$. Wir definieren die *imaginäre Einheit i* durch

$$i^2 := -1.$$

Alle Zahlen $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißen *imaginäre Zahlen*. Damit können wir die *Menge der komplexen Zahlen* definieren.

Definition 10 (Menge der komplexe Zahlen). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Zahl $z = a + bi$ heißt* komplexe Zahl. *Wir nennen a den* Realteil *und b den* Imaginärteil. *Die Menge*

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen. *Zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $a - bi$ heißen* konjugiert komplex.

Damit gilt beispielsweise $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$.

Für die behandelten Zahlenbereiche gilt nun $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{N}$. Man nennt die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *algebraisch abgeschlossen*, da jede algebraische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösbar ist, d.h. jedes nichtkonstante Polynom $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, \ldots, m$ und $a_m \neq 0$ hat eine komplexe Nullstelle, d.h.

$$\exists x_0 \in \mathbb{C} : p(x_0) = 0.$$

Die obige Aussage ist unter dem Ausdruck *Fundamentalsatz der Algebra* bekannt. Wir werden komplexe Zahlen in Abschnitt 5 im Detail studieren.

Wir wollen nun die erste Umkehrung des Potenzierens genauer betrachten.

1.5.4 $n$te-Wurzel, Potenzen mit rationalen Exponenten, Potenz- und Wurzelgesetze

Definition 11 (n-t Wurzel). *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die nicht negative Zahl $b \in \mathbb{R}$, deren n-te Potenz gleich a ist, heißt n-*te Wurzel *aus a:*

$$b^n = a \qquad :\Longleftrightarrow \qquad b = \sqrt[n]{a} =: a^{1/n}$$

Die Zahlen a und n heißen Radikant *bzw.* Wurzelexponent.

Die tatsächliche Berechnung des Wurzelwertes nennt man *Radizieren* oder das *Ziehen der n-ten Wurzel.* Aus der obigen Definition folgt allgemein

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ und } a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Die obige Definition ermöglicht es uns, Potenzen mit reeller Basis und rationalen Exponenten zu definieren.

Definition 12 (Potenzen mit rationalem Exponenten). *Seien $a \in \mathbb{R}, a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Wir definieren die* (gebrochene) Potenz *a^r durch*

$$a^r = a^{p/q} := \left(a^{1/q}\right)^p.$$

Da das Wurzelziehen und das Potenzieren inverse Rechenoperationen sind, gilt

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \qquad a^{n/n} = a.$$

Um das Rechnen mit Wurzelausdrücken zu erleichtern, erinnern wir an die folgenden *Wurzel- und Potenzgesetze*:

Satz 13 (Wurzel- und Potenzgesetze). *Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $k, m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

1. *Produktregel:* $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \Longleftrightarrow a^{1/n}b^{1/n} = (ab)^{1/n}$

2. *Quotientenregel:* $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a/b} \Longleftrightarrow \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$

3. *Verschachtelungsregel:* $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a} \Longleftrightarrow \left(a^{1/n}\right)^{1/k} = a^{1/(nk)}$

Aus dem Satz ergeben sich die Rechenregeln im Falle eines gleichen Radikanten:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = a^{1/n}a^{1/m} = a^{(1/m)+(1/n)} = a^{(m/mn)+(n/mn)} = a^{(m+n)/mn} = \sqrt[nm]{a} \qquad \text{und}$$
$$a^{m/n} = a^{(mk)/(nk)} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Beispiele: Seien $a, x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{1-2a^2}{a^n} - \frac{3a-2}{a^{n-2}} + \frac{3}{a^{n-3}} = \frac{1-2a^2-3a^2+2a^2+3a^3}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.
2. $\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-2} \frac{x^5}{y^{-3}} = \frac{x^{-1}}{y^{-1}} = \frac{y}{x}$.
3. $\frac{5\sqrt{6}+6}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Rationalmachen des Nenners. Treten Brüche mit irrationalen Nenner $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, a > 0, m, n \in \mathbb{N}, m < n$ auf, so erweitern man den Bruch mit $a^{1-m/n}$. Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Wir kommen nun zur zweiten Umkehrung des Potenzierens, der Logarithmenrechnung (griech. logos arithmos, Verhältniszahl).

1.5.5 Logarithmen

Definition 14 (Logarithmus)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}_+, b \neq 1$. Die reelle Zahl n, für die $b^n = a$ gilt, heißt der* Logarithmus von a zur Basis b*:*

$$b^n = a \Longleftrightarrow: n = \log_b a$$

Die Zahl b wird Logarithmenbasis genannt *und a heißt* Logarithmand *oder* Numerus*.*

Beispiele: Wir betrachten die folgenden Äquivalenzen.

1. $5^3 = 125 \Longleftrightarrow \log_5 125 = 3$
2. $10^4 = 10\,000 \Longleftrightarrow \log_1 10\,000 = 4$
3. $4^{-3} = 1/64 \Longleftrightarrow \log_4(-1/64) = -3$

Die Ausdrücke auf der linken Seite sind jeweils *Potenzgleichungen*; die auf der rechten Seite *Logarithmengleichungen.*

Da das Logarithmieren und das Potenzieren inverse Rechenoperationen sind, gilt

$$b^{\log_b a} = a \qquad \text{und} \qquad \log_b b^n = n.$$

Es gelten folgende Sonderfälle:

$$b^1 = b \Longleftrightarrow \log_b b = 1$$
$$b^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_b 1 = 0$$

Wir wollen als nächstes untersuchen, warum der Logarithmus für die Rechenkunst im Zeitalter vor dem Computer so entscheidend war. Dazu betrachten wir für $b, u, v > 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$ die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} u := b^m &\iff \log_b u = m \\ v := b^n &\iff \log_b v = n \\ uv = b^m b^n = b^{m+n} &\iff \log_b(uv) = m + n = \log_b u + \log_b v \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die (schwierige) Multiplikation somit auf die (einfache) Addition zurückzuführen ist, $uv = \log_b u + \log_b v$. Entsprechende Beziehungen ergeben sich für weitere Rechenoperationen und bilden die sogenannten *Logarithmengesetze*.

Satz 15 (Logarithmengesetze)**.** *Seien $b, u, v > 0$ und m, n beliebige reelle Zahlen. Dann gelten:*

1. $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$
2. $\log_b(u/v) = \log_b u - \log_b v$
3. $\log_b(u^n) = n \log_b u$
4. $\log_b(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_b u$

Diese Gesetze führen die Multiplikation und die Division auf die Addition und die Subtraktion zurück. Vor der Entwicklung der Rechentechnik waren deshalb die Logarithmen bei Umfangreichen Rechnungen ein wichtiges Rechenhilfsmittel.

Beispiele:

1. $\log_b a + \frac{1}{2} \log_b c - 3 \log_b d = \log_b \left(\frac{a\sqrt{c}}{d^3} \right)$
2. $\log_b \left(\frac{\sqrt[3]{m(p-q)}}{(m+n)^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\log_b m + \log_b(p-q) \right) - 2 \log(m+n)$

Ein *Logarithmensystem* ist die Menge der Logarithmen der positiven reellen Zahlen zu einer festen Basis b, $\{z = \log_b a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$. Besondere Bedeutung haben die Basen $b = 10$ und $b = e$.

Dekadische Logarithmen Die dekadischen Logarithmen werden zur Basis $b = 10$ gebildet und mit lg bezeichnet,

$$10^n = a \iff \log_{10} a = n =: \lg a.$$

Zum Beispiel ist $\lg 2 = 0,301\ldots$. Wir merken uns, dass Logarithmen im Allgemeinen keine rationale Zahlen sind.

Natürliche Logarithmen Die natürlichen Logarithmen werden zur Basis $b = e$ gebildet und mit ln bezeichnet,

$$e^n = a \iff \log_e a = n =: \ln a.$$

Die Zahl $e = 2,718\ldots$ ist eine irrationale Zahl.

Beispiel: Logarithmische Gleichungen kann man folgendermaßen nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 23,31^x &= 30,16 \qquad \mid \ln \\ \ln(23,31^x) &= \ln(30,16) \\ x \ln(23,31) &= \ln(30,16) \\ x &= \frac{\ln(30,16)}{\ln(23,31)} = 1,054 \end{aligned}$$

Die Logarithmen zweier Systeme sind proportional zueinander: Sind b_1 und b_2 Basen, so gilt für $a > 0$

$$a = b_1^n \qquad \text{und} \qquad n = \log_{b_1} a.$$

Wir logarithmieren den linken Term zur Basis b_2:

$$\begin{aligned} a &= b_1^n \qquad | \log_{b_2} \\ \log_{b_2}(a) &= n \log_{b_2}(b_1) \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen des rechten Terms $n = \log_{b_1}(a)$ erhalten wir $n = \frac{\log_{b_2}(a)}{\log_{b_2}(b_1)} = \log_{b_1}(a)$. Somit gilt

$$\log_{b_1}(a) = \frac{\log_{b_2}(a)}{\log_{b_2}(b_1)}.$$

Lediglich die dekadischen und die natürlichen Logarithmen einer positiven reellen Zahl können mit dem Taschenrechner berechnet werden. Hierzu findet man die Tasten $\boxed{\text{lg}}$ bzw. $\boxed{\text{ln}}$. Um nun auch den Logarithmus zu einer beliebigen Basis b zu bestimmen, ist die obige Gleichung hilfreich. Es gilt zum Beispiel:

$$\log_5 25 = \frac{\ln(25)}{\ln(5)} = 2.$$

1.5.6 Binomischer Lehrsatz

Ein *Binom* ist ein zweigliedriger Ausdruck der Form $a + b$ oder $a - b$. Sehr oft werden die folgenden Formeln gebraucht:

Satz 16 (Binomische Formeln)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

1. *Binomische Formel:* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. *Binomische Formel:* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. *Binomische Formel:* $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Um eine allgemeine Formel für $(a + b)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aufzustellen, betrachten wir zunächst

$$\begin{array}{|lc|} (a+b)^0 = & 1 \\ (a+b)^1 = & 1a + 1b \\ (a+b)^2 = & 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 = & 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 = & 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ \quad\vdots & \end{array}$$

Man erkennt folgende Gesetzmäßigkeiten: Die Potenzen von a erscheinen in den Summanden in der Reihenfolge $a^n, a^{n-1}, \ldots, a^1, a^0 = 1$, die Potenzen von b in der Reihenfolge $b^0 = 1, b^1, \ldots, b^n$. Die Summe der Exponenten in einem Summand ist stets gleich n. Um eine Gesetzmäßigkeit zu finden, schreiben wir die Koeffizienten heraus und erhalten damit das sogenannte *Pascalsche Dreieck* (chinesisch: *Yang-Hui-Dreieck*):

$$\begin{array}{lccccccccc} n = 0: & & & & & 1 & & & & \\ n = 1: & & & & 1 & & 1 & & & \\ n = 2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ n = 3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Am linken und rechten Rand steht in jeder Zeile die Zahl 1. Jeder andere Koeffizient ist gleich der Summe der beiden schräg über ihm stehenden Koeffizienten.
Diese Koeffizienten einer entwickelten Binompotenz lassen sich auch unabhängig vom Pascalschen Dreieck berechnen und werden als *Binomialkoeffizienten* wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

Damit ist der Binomialkoeffizient zunächst für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ erklärt und lässt sich ebenfalls in der Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

schreiben. Mit der Definition $0! = 1$ ergeben sich die Sonderfälle

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Hier finden Sie ein GeoGebra Arbeitsblatt zum Thema: `https://www.geogebra.org/m/rDTP2PYj`
Beispiele:

1. $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$
2. $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21$

Wir sehen, dass in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k = 0, 1, \ldots, n$ stehen. Zum Beispiel stehen in der 3. Zeile die Binomialkoeffizienten

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 3.$$

Aus diesen Überlegungen ergibt sich der Binomische Satz.

Satz 17 (Binomischer Satz)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a^{n-k} b^k).$$

Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{aligned}(2+x)^5 &= \binom{5}{0} 2^5 x^0 + \binom{5}{1} 2^4 x^1 + \binom{5}{2} 2^3 x^2 + \binom{5}{3} 2^2 x^3 + \binom{5}{4} 2^1 x^4 + \binom{5}{5} 2^0 x^5 \\ &= 1\cdot 32 + 5\cdot 16x + 10\cdot 8x^2 + 10\cdot 4x^3 + 5\cdot 2x^4 + 1\cdot 1x^5 \\ &= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir noch einige Eigenschaften des Binomialkoeffizienten behandeln:

Symmetrieeigenschaft: Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Diese Eigenschaft ist für die Symmetrie im Pascalschen Dreieck verantwortlich.

Summeneigenschaft: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Diese Formel bildet das obengenannte Bildungsgesetz für das Pascalsche Dreieck.

In der Kombinatorik gibt $\binom{n}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Elementen k-elementige Teilmengen zu bilden.

1.6 Teilbarkeitslehre

In Abschnitt 1.3 haben wir den Begriff der Teilbarkeit bereits eingeführt. Wir wollen diesen jetzt genauer betrachten. Dazu erinnern wir uns an die Definition.

Definition 18 (a teilt b)**.** *Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sagt man:* a teilt b *und schreibt* $a \mid b$*, falls es eine ganze Zahl* $c \in \mathbb{Z}$ *gibt mit* $b = ac$*. Andernfalls schreibt man* $a \nmid b$*.*

Es folgen einige einfache Eigenschaften der Teilbarkeitslehre.

1. Jedes $b \in \mathbb{Z}$ hat die trivialen Teilen $a = \pm 1$ und $a = \pm b$.
2. Jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist Teiler von $b = 0$, d.h. es gilt $a \mid 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$. Andererseits folgt aus $0 \mid a$, dass $a = 0$.
3. Teilbarkeit ist *transitiv*, d.h. stets gilt
$$a \mid b, \quad b \mid c \quad \Longrightarrow \quad a \mid c$$
4. Weiterhin gilt stets
$$\begin{aligned} a \mid b \quad &\Longrightarrow \quad ac \mid bc \quad \forall c \in \mathbb{Z} \\ a_1 \mid b_1, \quad a_2 \mid b_2 \quad &\Longrightarrow \quad a_1 a_2 \mid b_1 b_2 \end{aligned}$$
5. Die einzigen Teiler von ± 1 sind ± 1. Daraus ergibt sich
$$a \mid b, \quad b \mid a \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \pm 1 \text{ bzw. } b = \pm a$$

Definition 19 (größter gemeinsamer Teiler)**.**
1. *Eine Zahl* $c \in \mathbb{Z}$ *heißt* gemeinsamer Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}$*, falls* $c \mid a$ *und* $c \mid b$*.*
2. *Eine Zahl* $d \in \mathbb{Z}$ *heißt* größter gemeinsamer Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}$*, kurz* $d = \mathrm{ggT}(a, b)$*, falls*
   (a) $d \in \mathbb{N}$*,*
   (b) $d \mid a$ *und* $d \mid b$*,*
   (c) aus $c \mid a$ *und* $c \mid b$ *folgt* $c \mid d$*.*
3. *Zwei Zahlen* $a, b \in \mathbb{Z}$ *heißen* teilerfremd *(oder* relativ prim*), falls* $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$*.*

Man findet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ zum Beispiel über den *Euklidischen Algorithmus* (Euklid von Alexandria, griechischer Mathematiker, 3. Jahrhundert vor Christus). Der Euklidische Algorithmus basiert auf dem folgenden Satz.

Satz 20 (Division mit Rest)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $a \geq b$ *zwei natürliche Zahlen. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen* $q \in \mathbb{N}$ *und* $r \in \mathbb{N}_0$ *mit*
$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b.$$
Wir nennen q *den* ganzzahligen Quotienten *und* r *den* ganzzahligen Rest *der Division mit Rest.*

Der *euklidische Algorithmus* führt in jedem Schritt eine Division mit Rest aus. Er beginnt mit den beiden Zahlen a und $b = r_0$, deren größter gemeinsamer Teiler bestimmt werden soll,
$$a = q_1 \cdot r_0 + r_1.$$

In jedem weiteren Schritt wird mit dem Divisor und dem Rest des vorhergehenden Schritts eine erneute Division mit Rest durchgeführt. Und zwar so lange, bis eine Division aufgeht, das heißt, der Rest Null ist,

$$\begin{aligned} r_0 &= q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n + 0. \end{aligned}$$

Der Divisor r_n der letzten Division ist dann der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Beispiel: Wir wollen die Zahl $a = 91$ teilen durch die Zahl $b = 37 = r_0$. Die Rekursionsformel des Euklidischen Algorithmus liefert:

$$\begin{aligned} 91 &= 2 \cdot 37 + 17 \\ 37 &= 2 \cdot 17 + 3 \\ 17 &= 5 \cdot 3 + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist gegeben durch $\mathrm{ggT}(91, 37) = 1$.

2 Gleichungen, Ungleichungen, Beträge

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets einen festen *Grundbereich* (z.B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine *Variable* ist ein Element dieses Grundbereichs, das verschiedene Werte annehmen kann. Variablen werden meist mit den Buchstaben $x, y, z, t, u, v, \ldots$ bezeichnet. Eine *Konstante* ist das Zeichen für ein festes Element des Grundbereichs. Wir verwenden meistens die Buchstaben $a, b, c, \ldots$

Definition 21 (Term)**.** *Ein* Term *ist eine aus Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen gebildete mathematische Zahlenfolge.*

Beispiel: Terme sind z.B.

$$a^2 + 2b - 5, \qquad \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad \sqrt{t^1 - x}$$

während $x : (^1 a$ kein Term ist.

Für einen Term mit ein bzw. zwei Variablen x schreibt man $T(x)$ ('T von x') bzw. $T(x, y)$. Beispiele hierfür seien

$$T(x) = x^3 + 7, \qquad T(x, y) = ax^2 + xy + y^8.$$

In einen Term kann man Zahlen x des Grundbereichs einsetzen. Alle Zahlen x für die $T(x)$ wieder im Grundbereich liegen, bilden den *Definitionsbereich D_T des Terms T*. Sei zum Beispiel der Grundbereich $\mathbb{N}$ und $T(x, y) = x - y$. Dann bilden alle Tupel (x, y) mit $x > y$ den Definitionsbereich von T. Wir schreiben in dem Fall $D_T = \{(x, y) \in \mathbb{N} \mid x > y\}$.

Definition 22 (Gleichung)**.** *Eine* Gleichung *ist eine Verbindung von zwei Termen durch das Gleichheitszeichen:*

$$T_1 = T_2$$

Man unterscheidet:

1. Identische Gleichungen (Identitäten)*, z.B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Diese Gleichungen sind für jede Belegung von a und b gültig.*

2. Funktionsgleichungen, *z.B.* $y = 4x^2+9$. *Jedem Wert* x *aus einem Definitionsbereich wird genau ein Wert* y *zugeordnet.*

3. Bestimmungsgleichungen, *z.B.* $x^3 - 5x = 6 - 2x^2$. *Diese Gleichungen sind nur für bestimmte* x *erfüllt, die aus der Gleichung zu ermitteln sind.*

2.1 Bestimmmungsgleichungen mit einer Unbekannten

Wir betrachten die Gleichung $G : T_1(x) = T_2(x)$. Durch die Belegung der Variablen mit Zahlen x entstehen entweder

1. falsche Aussagen oder
2. wahre Aussagen. In dem Fall nennen wir x eine *Lösung von* G. Alle Lösungen zusammen bilden die *Lösungsmenge* L_G.

Beispiel: Die Gleichung $G : x^3 - 5x = 6 - 2x^2$ wird für

1. $x_1 = -3$ wegen $-27 + 15 = 6 - 18$
2. $x_1 = -1$ wegen $-1 + 5 = 6 - 2$
3. $x_1 = 2$ wegen $8 - 10 = 6 - 8$

zu einer wahren Aussagen. Damit gilt $L_G = \{-3, -1, 2\}$.

Der *Definitionbereich* D_G von $G : T_1(x) = T_2(x)$ ist der Durchschnitt $D_G = D_{T_1} \cap D_{T_2}$. Insbesondere ist damit die Lösungsmenge eine Teilmenge des Definitionsbereichs, $L_G \subseteq D_G$.

Die Lösung einer Bestimmungsgleichung erfolgt durch *äquivalente Umformungen*, bis die Unbekannte x isoliert auf einer Seite der Gleichung steht.

Definition 23 (äquivalente Umformungen)**.** *Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht ändern, heißen* äquivalente Umformungen.

Äquivalente Umformungen sind die Addition und die Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung. Die Multiplikation bzw. Division sind nur dann äquivalente Umformungen, wenn wir den Wert Null ausschließen können. Das Quadrieren ist im Allgemeinen keine äquivalente Umformungen, da sich der Definitionsbereich eventuell erweitert und sogenannte *Scheinlösungen* auftreten können.

Beispiel: Die Gleichung

$$G : \quad \frac{3}{x-2} + 5(x+1) = \frac{x+1}{x-2}$$

hat den Definitionsbereich $D_G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Durch Multiplikation mit dem Term $x - 2$ (nichtäquivalente Umformung, da $x - 2 = 0$ für $x = 2$) entsteht die Gleichung

$$G' : \quad 3 + 5(x+1)(x-2) = x + 1$$

mit Definitionsbereich $D_{G'} = \mathbb{R}$. Weitere äquivalente Umformungen führen auf die Lösungsmenge $L_{G'} = \{2, -4/5\}$. Da $2 \notin D_G$, kann $x = 2$ auch keine Lösung der Gleichung G sein. Damit gilt $L_G = \{-4/5\}$.

2.2 Arten von Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichungen unterscheiden sich durch den Aufbau der Terme, aus denen sie gebildet werden.

2.2.1 Algebraische Gleichungen

Ganzrationale Gleichungen Bei einer *ganzrationalen Gleichung* werden auf die Unbekannte x nur die Addition, Subtraktion und Multiplikation angewandt. Jede ganzrationale Gleichung läßt sich durch äquivalente Umformungen auf die Gestalt der *Normalform n-ten Grades* bringen,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{$*$}$$

mit a_i aus dem Grundbereich (z.B. $\mathbb{C}$) für $i = 0, \ldots, n$.

Satz 24 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Eine Gleichung n-ten Grades im Grundbereich der komplexen Zahlen hat genau n Lösungen.*

Diese Satz wurde von C.F. Gauss 1799 in seiner Dissertation erstmalig bewiesen. Die Lösungen werden auch als *Wurzeln* bezeichnet.

Hat eine Gleichung n-ten Grades die Lösungsmenge $L_G = \{x_1, \ldots, x_n\}$, dann läßt sie sich in der *Produktdarstellung*

$$G: \quad (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0$$

darstellen. Ist eine Lösung x_1 von G bestimmt, so lässt sich der *Linearfaktor* $(x - x_1)$ abspalten, d.h. G lässt sich schreiben als

$$G': \quad (x - x_1)(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0),$$

wobei sich die Koeffizienten b_i, $i = n-1, \cdots, 0$ durch Partialdivision ergeben. Die *reduzierte Gleichung* G' ist nun vom Grad $n - 1$, etc.

Beispiel:

1. Gegeben sei die Gleichung $(x^3 - 5x^2 - 9x + 45) = 0$. Durch ausprobieren sieht man, dass $x_1 = 5$ eine Nullstelle ist. Damit lässt sich der Linearfaktor $(x - 5)$ durch Partialdivision abspalten, $(x^3 - 5x^2 - 9x + 45) : (x - 5) = x^2 - 9$, da
$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 5x^2 - 9x + 45\big) : \big(x - 5\big) = x^2 - 9 \\ \underline{-\,x^3 + 5x^2} \\ \qquad\qquad -\,9x + 45 \\ \qquad\qquad \underline{\;\;\;9x - 45} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$
Der Term $x^2 - 9$ hat die Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$. Damit gilt
$$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = (x - 5)(x - 3)(x + 3).$$

2. Gegeben sei die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$. Durch ausprobieren sieht man, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist. Damit lässt sich der Linearfaktor $(x - 2)$ durch Partialdivision abspalten, $(x^3 - 6x^2 + 21x - 26) : (x - 2) = x^2 - 4x + 13$, da
$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 6x^2 + 21x - 26\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 4x + 13 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad -\,4x^2 + 21x \\ \qquad \underline{\;\;\;4x^2 - 8x} \\ \qquad\qquad\quad 13x - 26 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-\,13x + 26} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$
Der Term $x^2 - 4x + 13$ hat die Nullstellen $x_2 = 2 + 3i$ und $x_3 = 2 - 3i$. Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch $L = \{2, 2 \pm 3i\}$.

Wir merken uns, dass komplexe Lösungen einer Gleichung n-ten Grades stets paarweise als konjugiertkomplexe Zahlen auftreten. Daraus folgt, dass eine Gleichungen n-ten Grades mit ungeradem n mindestens eine relle Lösung hat.
Zwischen den Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und den Koeffizienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ bestehen die folgenden Beziehungen:

Satz 25 (Wurzelsätze von Vieta)**.**

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -a_{n-1} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= a_{n-2} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -a_{n-3} \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n a_0 \end{aligned}}$$

Aus der Normalform $(*)$ ergibt sich damit für

$n = 1$ die *Normalform der linearen Gleichungen* $x + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = -a_0$

$n = 2$ die *Normalfrom der quadratischen Gleichungen* $x^2 + a_1x + a_0$ bzw. $x^2 + px + q$. Für $p, q \neq 0$ ergeben sich die Lösungen nach der *p-q-Formel*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Je nach Größe der *Diskriminante* $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ erhält man

$\Delta > 0$ 2 reelle Lösungen
$\Delta < 0$ 2 konjugiert komplexe Lösungen
$\Delta = 0$ 2 zusammenfallende reelle Lösungen

Für $p = 0$ ergeben sich die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$, die für $q \leq 0$ reell und für $q > 0$ imaginär sind.

Für $q = 0, p \neq 0$ ergeben sich die Lösungen $x_1 = 0, x_2 = -p$.

Für den Wurzelsatz von Vieta folgt mit $n = 2$:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

$n = 3, 4$ die entsprechende Normalform dritten bzw. vierten Grades.

Für Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es ähnliche Formeln wie für die quadratischen Gleichungen. Für Gleichungen 5. und höheren Grades existieren keine allgemeingültigen Formeln. Daher werden hier meist sogenannte Näherungsverfahren eingesetzt. Auf grafischem Weg werden erste Näherungswerte ermittelt und dann iterativ verbessert (Abschnitt **??**).

Beispiele:

1. Es sei bekannt, dass die Lösungen der Gleichung

$$G: \quad x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$$

ganzzahlig sind.

Wegen $x_i \in \mathbb{Z}$ müssen die Lösungen nach den Wurzelsätzen von Vieta Teiler von 15 sein, also $L_G \subseteq \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$.

Durch einsetzen der Teiler sieht man, dass $x_1 = -1$ eine Lösung ist,

$$1 - 4 - 10 + 28 - 15 = 0.$$

Ebenso ist $x_2 = 3$ eine Lösung. Durch Partialdivision der Gleichung G durch $(x+1)(x-3)$ ergibt sich

$$(x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15) : (x+1)(x-3) = x^2 + 6x + 5.$$

Wir erhalten damit eine quadratische Gleichung, mit den Lösungen $x_3 = -1, x_4 = -5$. Damit ist $x_1 = x_3 = -1$ eine Lösung mit doppelter *Vielfachheit* und die Lösungsmenge ist gegeben durch $L_G = \{-5, -1, 3\}$. Die Produktdarstellung von G lautet

$$G: \qquad (x+5)(x+1)^2(x-3) = 0.$$

Als nächstes behandeln wir zwei Arten von algebraischen Gleichungen anhand von Beispielen:

Gebrochenrationale Gleichungen (Bruchgleichungen) enthalten mindestens eine Unbekannte x im Nenner.

Beispiel:

$$G: \qquad \frac{12x}{x^2 + x - 6} - 2 = \frac{x+1}{x-2}.$$

Wegen $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ können wir für G äquivalent schreiben

$$G: \frac{12x - 2(x^2 + x - 6)}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}.$$

Multiplikation mit $(x+3)(x-2)$ auf beiden Seiten der Gleichung und weitere Umformungen ergeben die quadratische Gleichung

$$G': \qquad x^2 - 2x - 3 = 0,$$

mit den Lösungen $L_{G'} = \{3, -1\}$. Da die Lösungen beide keine Nullstellen von $(x+3)(x-2)$ sind, gilt $L_G' = L_G$.

Irrationale Gleichungen (Wurzelgleichungen) erhalten mindestens ein x im Radikanten. Mehrere derartige Wurzeln werden auf beide Seiten der Gleichung verteilt, bevor die Gleichung quadriert wird.

Beispiel: Sei

$$G: \qquad \sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2.$$

Wir isolieren zunächst die einzelnen Wurzeln:

$$G: \qquad \sqrt{2x+10} = 2 + \sqrt{4x-8},$$

und quadrieren (nicht äquivalente Umformung!) anschließend unter der Beachtung der binomischen Formel

$$G': \qquad 2x + 10 = 4 + 4\sqrt{4x-8} + 4x - 8.$$

Wir isolieren erneut die Wurzel

$$G: \qquad -x + 7 = 2\sqrt{4x-8},$$

und quadrieren (nicht äquivalente Umformung!) abermals

$$G'': \qquad x^2 - 14x + 49 = 16x - 32,$$

und erhalten die Lösungsmenge $L_{G''} = \{3, 27\}$. Die Probe ergibt, dass die Lösungsmenge von G lediglich die Zahl 3 enthält.

2.2.2 Transzendente Gleichungen

Nichtalgebraische Gleichungen heißen *trasnzendente Gleichungen*. Dazu gehören:

Expontentialgleichungen enthalten mindestens eine Unbekannte in einem Exponenten. Nur einige Typen können nach x aufgelöst werden. Im Allgemeinen müssen auch hier *Näherungsverfahren* angewandt werden.

Beispiele:

1. Sei

$$G: \qquad 2^{2x+1} \cdot 8^{x-5} = 2^{x-2}.$$

Mit $8 = 2^3$ folgt

$$G: \qquad 2^{2x+1} \cdot 2^{3(x-5)} = 2^{x-2} \quad \text{oder} \quad 2^{5x-14} = 2^{x-2}.$$

Da auf beiden Seiten der Gleichung Potenzen mit der gleichen Basis stehen, müssen auch die Exponenten gleich sein:

$$G': \qquad 5x - 14 = x - 2,$$

also ergibt sich als Lösungsmenge $L_{G'} = L_G = \{3\}$.

2. Sei

$$G: \qquad 5^{x-1} = 2^x.$$

Diese Gleichung wird gelöst, indem sie logarithmiert wird:

$$\begin{aligned} (x-1)\ln(5) &= x\ln(2) \\ x(\ln(5) - \ln(2)) &= \ln(5) \\ x_1 &= \frac{\ln(5)}{\ln(5) - \ln(2)} = 1,756. \end{aligned}$$

Also $L_G = \{1,756\}$.

3. Sei

$$G: \qquad 2^x - 3x + 1 = 0.$$

Da x nicht nur als Exponent vorkommt, kann dieser Gleichungstyp nur mit einem Näherungsverfahren gelöst werden.

Logarithmische Gleichungen enthalten mindestens einen Logarithmus der Unbekannten x.

Beispiel:

1. Sei

$$G: \quad 10\ln(2x) = 3.$$

Die Lösungsmenge $L_G = \{1/2 \cdot e^{0,3}\}$ ergibt sich aus der Rechnung:

$$\begin{aligned} \ln(2x) &= 0,3 \\ 2x &= e^{0,3} \\ x_1 &= \frac{1}{2}e^{0,3} \end{aligned}$$

2.3 Absolute Beträge

Definition 26 (Absolue Betrag)**.** *Der* absolute Betrag *einer Zahl a, im Zeichen $|a|$, ist die nichtnegative Zahl der beiden Zahlen a und $-a$,*

$$|a| := \begin{cases} a & \textit{für } a \geq 0 \\ -a & \textit{für } a < 0. \end{cases}$$

Beispiele: $|8| = 8, |-3| = 3, |0| = 0$.

Aus der Definition ergeben sich die Folgerungen

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| \geq a$
3. $|-a| = |a|$, $|a-b| = |b-a|$

Für das Rechnen mit Beträgen sind die folgenden Formeln wichtig:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *Dreiecksungleichung*

Diese Ungleichung entspricht dem Satz 'Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite'.
Allgemein gilt die Formel

$$|a+b+c\cdots| \leq |a| + |b| + |c| + \cdots .$$

Für die Differenz gilt

$$|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|.$$

Beispiele:

1. Für $T(a,b) = |4a+2b| - a - |b|$ gilt etwa $T(3,-4) = -3$ und $T(-5,5) = 10$.
2. Welchen Wert kann der Term $T(m,n) = 3m - n$ unter den Bedingungen $|m| = 5$ und $|n| = 2$ annehmen?

   Lösung: Wir können $T(5,2) = 13, T(5,-2) = 17, T(-5,2) = -17, T(-5,-2) = -13$ berechnen.

Interessiert nur das Vorzeichen einer reellen Zahl a, dann wird das Symbol $\operatorname{sgn}(a)$ (gelesen 'Signum a') verwendet,

$$\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

2.4 Intervalle

Definition 27 (Intervall)**.** *Ein* Intervall *ist eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen.*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

- $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b
- $(a,\infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$ offenes Intervall ab a

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall von a bis b
- $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ linksseitig abgeschlossenes und rechtsseitig offenes Intervall von a bis b
- $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$ abgeschlossenes unbeschränktes Intervall ab a

Beispiel: Gesucht wird im Grundbereich $\mathbb{R}$ der Definitionsbereich der Gleichung $\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{7-x}$.
Lösung: Es gilt $D_1 = [2, \infty)$ und $D_2 = (-\infty, 7]$. Für den Definitionsbereich der Gleichung gilt

$$D_1 \cap D_2 = [2, 7].$$

2.5 Ungleichungen

Die folgenden Betrachtungen gelten im Grundbereich $\mathbb{R}$. Im Bereich $\mathbb{C}$ gibt es keine Größer/Kleiner-Beziehungen.

Definition 28 (Ungleichungen)**.** *Eine* Ungleichung *ist die Verbindung von zwei Termen durch eines der Relationszeichen* $>, <, \leq, \geq, \neq$.

Bei Ungleichungen mit einer Variablen gibt es analoge Begriffe wie bei Gleichungen: Definitionsbereich, Wertebereich, Lösungsmenge, etc. Im Gegensatz zu Gleichungen sind allerdings die Lösungsmengen Intervalle.
Beispiele:

1. $G: \quad 3x - 2 \leq 5x + 4$
   Lösung: $L_G = [-3, \infty)$
2. $G: \quad |x + 2| < 3$
   Lösung: $L_G = (-5, 1)$
3. $G: \quad \frac{1}{2x-3} \leq 2$
   Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D_G = \mathbb{R} \backslash \{3/2\}$. Bei der Multiplikation mit dem Term $T(x) = 2x - 3$ müssen zwei Fälle unterschieden werden:

$$\begin{aligned} T(x) = 2x - 3 > 0 \quad &\text{und} \quad T(x) = 2x - 3 < 0 \\ x > \frac{3}{2} \quad &\text{und} \quad x < \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{$*$}$$

   Die Multiplikation der Ungleichung mit $T(x)$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 \leq 4x - 6 \quad &\text{und} \quad 1 \geq 4x - 6 \\ x \geq \frac{7}{4} \quad &\text{und} \quad x \leq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

   Unter Beachtung von $(*)$ folgen für die Lösung der Teilmengen

$$L_1 = \left[\frac{4}{5}, \infty\right) \quad \text{und} \quad L_2 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right).$$

   Die Lösungsmenge der Ungleichung ist somit

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, \infty\right) = \mathbb{R} \backslash \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right).$$

3 Funktionen

3.1 Abbildungen

Definition 29 (Abbildung)**.** *Gegeben seien zwei (nicht leere) Mengen X und Y.*

1. *Eine* Abbildung *ordnet jedem Element $x \in X$ ein oder mehrere Elemente $y \in Y$ zu. Man schreibt $F : X \to Y$, $F = \{(x, y) \mid x \mapsto y, x \in X\}$, oder $y = F(x)$. Wir nennen y das* Bild *von x unter der Abbildung F.*
2. *Falls jedes $x \in X$ ein Bild $y \in Y$ hat, so heißt die Menge X* Urbildbereich *oder* Definitionsbereich.
3. *Falls auch jedes $y \in Y$ ein Urbild $x \in X$ mit $y = F(x)$ hat, nennen wir die Menge Y den* Wertebereich.
4. *Ist jedem Urbild x nur ein Bild y zugeordnet, heißt F eine* eindeutige Abbildung. *Hat bei einer eindeutigen Abbildung jedes Bild y nur ein Urbild x, so nennen wir sie* eineindeutige Abbildung.

Beispiel: Mehrere Maschinen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ können durch mehrere Schalter $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ein- bzw. ausgeschaltet werden. Durch eine Abbildung F von $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ nach $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ werden die Schalter den Maschinen zugeordnet, vergleiche Abbildung 1.

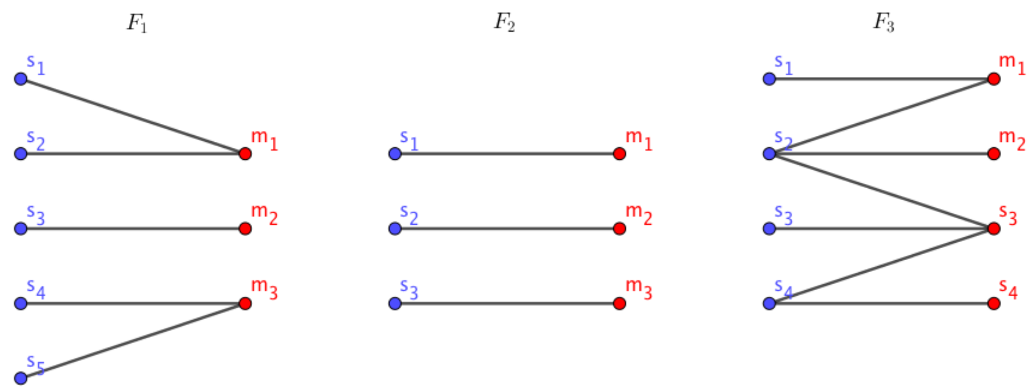


Abbildung 1: Die Abbildung F_1 ist eindeutig, die Abbildung F_2 ist eineindeutig und die Abbildung F_3 nicht eindeutig.

Werden in einer Abbildung $F : X \to Y$ die Bilder als Urbilder und die Urbilder als Bilder betrachtet, entsteht eine neue Abbildung.

Definition 30 (Umkehrabbildung)**.** *Die aus einer Abbildung $F : X \to Y$ von X auf Y durch Vertauschen von Urbildmenge X und Bildmenge Y entstehende Abbildung heißt* Umkehrabbildung *von F. Man schreibt $F^{-1} : Y \to X$.*

3.2 Allgemeines über Funktionen

Definition 31 (Funktion)**.** *Seien X und Y zwei nichtleere reelle Teilmengen. Ist jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ zugeordnet, so sprechen wir von einer* reellen Funktion. *Wir schreiben*

$$f : x \mapsto f(x) = y.$$

Gelesen: 'x wird unter der Funktion f auf y abgebildet'.

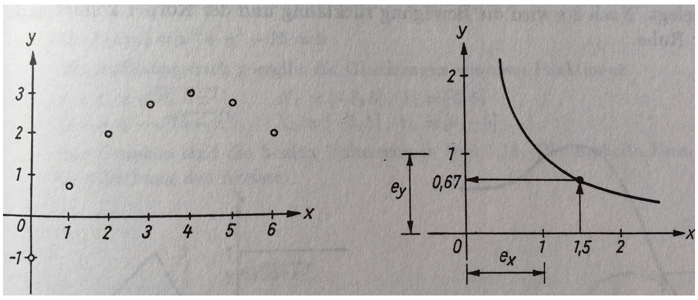


Abbildung 2: Der linke Graph zeigt die in Abschnitt 3.2.1 definierte Funktion. Der rechte Graph zeigt die Funktion $f : x \mapsto 1/x$.

> x *heißt* unabhängige Variable *oder* Argument, $y = f(x)$ *heißt* abhängige Variable *oder* Funktionswert an der Stelle x.

Eine Funktion ist also eine eindeutige Abbildung in der Menge der reellen Zahlen.

3.2.1 Darstellungsarten von Funktionen

Für die Zuordnungsvorschrift $f : x \mapsto y = f(x)$ gibt es verschiedene Darstellungsarten.

Wertetabelle. Die geordneten Paare $(x, y) = \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ werden in einer Tabelle zusammengefasst.

Beispiel: Die Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	0,75	2	2,75	3	2,75	2

stellt die Funktion

$$f : \begin{cases} 0 \mapsto -1 \\ 1 \mapsto 0,75 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 2,75 \\ 4 \mapsto 3 \\ 5 \mapsto 2,75 \\ 6 \mapsto 2 \end{cases}$$

dar. Der Definitionsbereich ist $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und ihr Wertebereich ist $Y = \{-1; 0,75; 2; 2,75; 3; 2,75; 2\}$.

Ist der Definitionsbereich ein Intervall, kann man durch eine Wertetabelle nur eine Teilmenge der Wertepaare (x, y) angeben. Beispiele für Wertetabellen sind Messreihen oder die Logarithmentafeln.

Grafische Darstellung. Für die grafische Darstellung wird meist ein kartesisches Koordinatensystem mit der x-Achse als *Abszissenachse* und der y-Achse als *Ordinatenachse* zugrunde gelegt. Jedes Wertepaar (x, y) wird eindeutig einem Punkt zugewiesen. Die Menge alles Punkte heißt *Funktionsbild* oder *Graph* der Funktion f.
Ist der Definitionsbereich ein Intervall, dann stellt der Graph eine Kurve dar. Andernfalls sehen wir nur die einzelnen Wertepaare.
Nicht jede Kurve kann der Graph einer Funktion sein. Da eine Funktion f eine eindeutige Abbildung ist, darf jede Paralle zu y-Achse den Graph von f nur in einem Punkt schneiden (vergleiche Abbildung 6).

Analytische Darstellung. Die Zuordnung $x \mapsto f(x) = y$ wird durch eine *Funktionsgleichung* hergestellt. Diese kann in drei Formen auftreten.

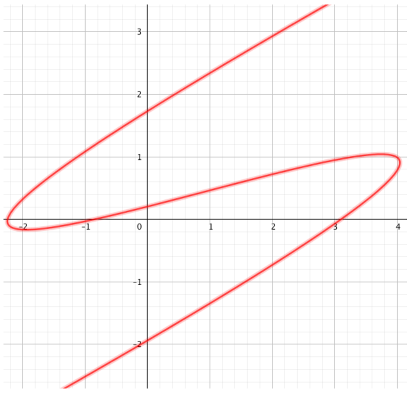


Abbildung 3: Diese Kurve ist kein Funktionsgraph, da die Abbildung nicht eindeutig ist.

1. **Explizite Form.** Auf einer Seite der Funktionsgleichung steht y isoliert,

$$y = f(x).$$

Beispiele:

(a) $f : y = -\frac{2}{3}x + 2, \quad X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

(b) $f : y = \sqrt{3-x}, \quad X = (-\infty, 3], Y = [0, \infty)$

(c) $f : y = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \in [0, 2] \\ -x + 4 & \text{für } x \in (2, 4] \end{cases}$

2. **Implizite Form.** Die allgemeine Form lautet

$$F(x, y) = 0.$$

Man erkennt hier nicht genau, ob die Zuordnung $x \mapsto y$ eindeutig ist, d.h. ob F eine Funktionsgleichung ist oder die Gleichungen mehrerer Funktionen zusammenfasst.

Beispiele:

(a) $F(x, y) = 2x + 3y - 6 = 0$. Die Auflösung nach $y4$ ergibt die explizite Form $y = -2/3x + 2$.

(b) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$. Die Auflösung nach y ergibt die explizite Form zweier Funktionen

$$f_1 : y = \sqrt{25 - x^2}, \quad X_1 = [-5, 5], Y_1 = [0, 5]$$
$$f_2 : y = -\sqrt{25 - x^2} \quad X_1 = [-5, 5], Y_1 = [0, -5]$$

Ihre Graphen sind die beiden Halbkreise in Abbildung 4.

3. **Parameterdarstellung.** Bei der Parameterdarstellung werden die Variablen x und y getrennt voneinander und in Abhängigkeit einer dritten Variablen, dem *Parameter*, dargestellt

$$x = \phi(t), \qquad t \in T$$
$$y = \psi(t).$$

Jedem $t \in T$ wird eindeutig ein $x \in X$ und ein $y \in Y$ zugeordnet. Aus der Parameterform kann (wenn möglich) die explizite Form gewonnen werden, indem $\phi(t)$ nach t aufgelöst und dieser Term für t in $\psi(t)$ eingesetzt wird.

Beispiele:

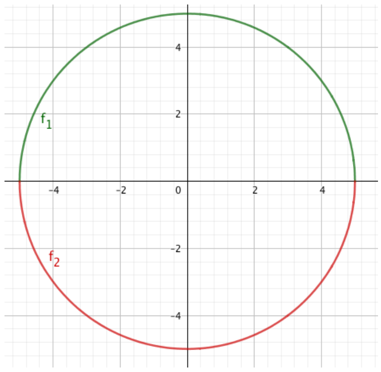


Abbildung 4: Abgebildet sind die Graphen zweier Funktionen $f_1 : y = \sqrt{25 - x^2}$ und $f_2 : y = -\sqrt{25 - x^2}$. In der impliziten Darstellung schreibt man $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$.

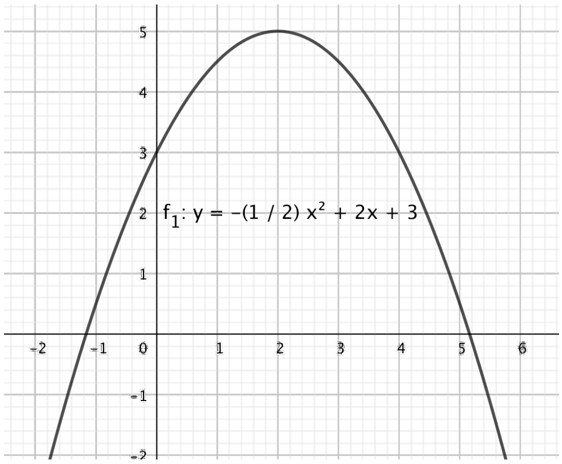


Abbildung 5: Der Funktionsgraph der Funktion $f : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ (explizite Darstellung) bzw. $x = t + 2 = \phi(t), y = 5 - \frac{1}{2}t^2 = \psi(t), t \in \mathbb{R}$ (Parameterdarstellung).

(a) Sei $x = t + 2 = \phi(t)$ und $y = 5 - \frac{1}{2}t^2 = \psi(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Die Elimination von t ergibt mit $t = x - 2$ und $y = 5 - \frac{1}{2}(x - 2)^2$ die parameterfreie explizite Form

$$f : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3.$$

In Abbildung 5 ist der zugehörige Funktionsgraph dargestellt.

(b) Der Kreis in Abbildung 4 hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= 5\cos(t) = \phi(t), \qquad t \in [0, 2\pi) \\ y &= 5\sin(r) = \psi(t). \end{aligned}$$

Der Parameter t ist hier ein *Drehwinkel*; beim Durchlauf von 0 bis 2π ergeben sich alle Kreispunkte. Durch Quadrieren und Addition der zwei Gleichungen ergibt sich wieder die impliziete Form aus dem obigen Beispiel.

3.3 Eigenschaften von Funktionen

Definition 32 ((monoton) steigend/fallend)**.** *Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt im Intervall $I \subseteq X$*

monoton $\begin{cases} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ *falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt* $\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2), \end{cases}$ *sie heißt* streng

monoton $\begin{cases} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ *falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt* $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$

Definition 33 (Gerade/ungerade Funktion)**.** *Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt*

$\begin{cases} \text{gerade Funktion} \\ \text{ungerade Funktion,} \end{cases}$ *falls für jedes $x \in X$ gilt:* $\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$

Definition 34 (Periodisch)**.** *Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt* periodisch*, falls eine reelle Zahl $p > 0$ existiert, sodass für alle $x \in X, x + kp \in X$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$f(x + kp) = f(x).$$

In dem Fall heißt p Periode *der Funktion f.*

Beispiele:

1. $f_1 : y = -2x + 1$ ist streng monoton fallend.
2. $f_2 : y = \sin(x)$ ist auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton steigend, auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend, usw. Ferner ist f_2 periodisch. Die kleinste Periode ist $p = 2\pi$.
3. $f_3 : y = x^4 - 2x^2 + 1$ ist eine gerade Funktion
4. $f_4 : y = 5x^5 - x^3$ ist eine ungerade Funktion

3.4 Verknüpfungen und Umkehrfunktion

3.4.1 Verknüpfungen

Definition 35 (Verknüpfung)**.** *Liegen die Bilder $y \in Y$ einer Funktion $f : X \to Y$ in der Definitionsmenge einer weiteren Funktion $g : Y \to Z$, so erklärt die Zuordnung*

$$g \circ f : X \to Z, x \mapsto z = g(f(x))$$

eine dritte Abbildung, die sogenannte Verknüpfung *$g \circ f$ von f und g.*

Satz 36 (Verknüpfungen)**.** *Für Verknüpfungen gilt das Assoziativgesetz*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Für Verknüpfungen gilt jedoch nicht das Kommutativgesetz, vielmehr ist im Allgemeinen

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Zur Konstruktion einer Verknüpfung vergleiche Abbildung 7.

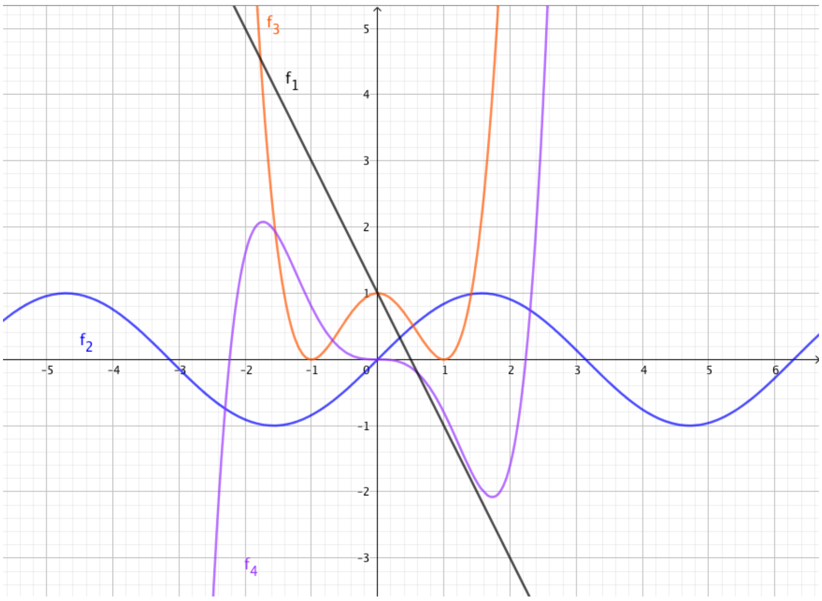


Abbildung 6: Die Abbildung zeigt die Funktionen f_1 bis f_4 aus dem Beispiel in Abschnitt 3.3. Siehe auch GeoGebra Arbeitsblatt `https://ggbm.at/TaQmWXjV`

3.4.2 Umkehrfunktion

Die Funktion $f : x \mapsto f(x) = y$ ordnet jedem x einen eindeutigen Wert y zu. Falls auch jedem y ein eindeutiger Wert x zugeordnet werden kann, können wir die sogenannte *Umkehrfunktion* $f^{-1} : y \mapsto x$ definieren.
Bei einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ erhält man die Umkehrfunktion in zwei Schritten:

1. Als erstes wird die Funktionsgleichung nach x umgestellt: $x = f^{-1}(y)$
2. Anschließend werden die Variablen x und y vertauscht.

Beispiele:

1. $f : y = \frac{1}{2}x - 1 = f(x)$ mit $X = Y = \mathbb{R}$.
   (a) $f^{-1} : x = 2y + 2$
   (b) $f^{-1} : y = 2x + 2$ ist die Umkehrfunktion von f.

   Die Graphen von f und f^{-1} sind dann symmetrisch zur Diagonalen $x = y$.
2. $f : y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}, f(x) \in [1, \infty]$.
   (a) $f^{-1} : x_{1/2} = \pm\sqrt{y - 1}$
   (b) $f^{-1} : y_{1/2} = \pm\sqrt{y - 1}, x \in \mathbb{R}, y_1 \in [0, \infty), y_2 \in (-\infty, 0]$.

Die Frage, unter welchen Umständen eine Umkehrfunktion existiert, beantwortet der folgende Satz.

Satz 37. *Ist eine Funktion f in einem Intervall $I \subseteq X$ streng monoton, dann existiert für diese Intervall die Umkehrfunktion.*

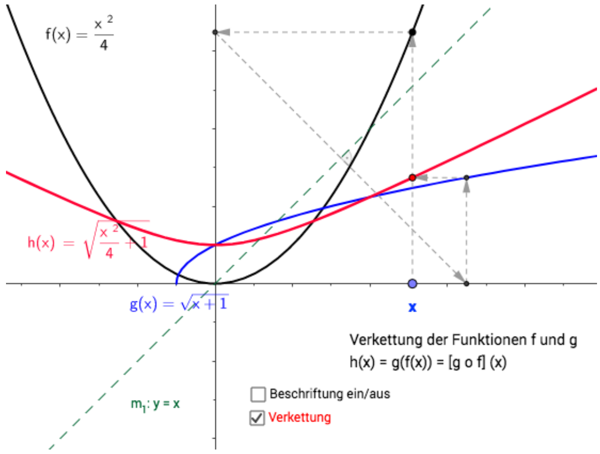


Abbildung 7: Verknüpfung zweier Funktionen mit Konstruktionsanleitung des Punktes $h(x) = g(f(x))$. Siehe auch GeoGebra Arbeitsblatt `https://ggbm.at/RtyDYFZN`

.

3.5 Spezielle Abbildungen (Verschiebung, Streckung, Stauchung)

Eine Funktion $f : y = f(x)$ habe den Graphen k. Werden zu den Variablen x und y Konstanten addiert und multipliziert, so entsteht die Gleichung einer neuen Funktion f' mit dem Graphen k'.

- $y = f(x + a)$ Schiebung um $-a$ parallel zur x-Achse
- $y = f(x) + b$ Schiebung um b parallel zur y-Achse
- $y = f(cx), 0 < |c| < 1$ Streckung in x-Richtung
- $y = f(cx), |c| > 1$ Stauchung in x-Richtung
- $y = df(x), 0 < |d| < 1$ Stauchung in y-Richtung
- $y = df(x), |d| > 1$ Streckung in y-Richtung

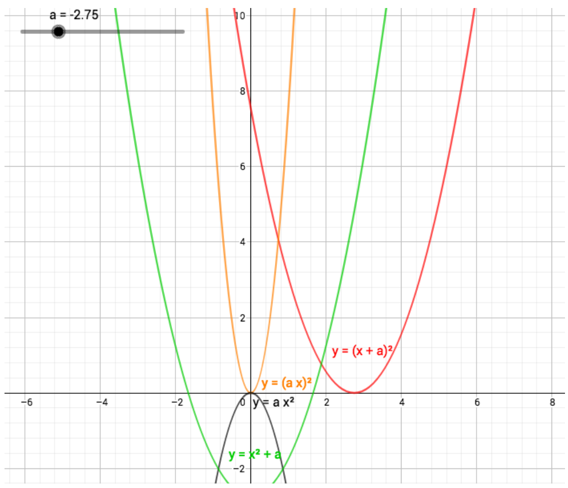


Abbildung 8: Es sind die Graphen der Funktionen abgebildet, die aus $y = x^2$ durch Streckung, Stauchung und Verschiebung mit dem Faktor a hervorgehen. Siehe dazu auch `https://www.geogebra.org/m/GqYAtXSk`.

3.6 Newtonsches Interpolationspolynom

Manchmal ist es die Aufgabe zu einer gegebenen Wertetabelle eine passende Funktion aufzustellen. Die Wertepaare sind dabei meist Resultate von Messungen. Da ganzrationale Funktionen zu den einfachsten gehören, werden unbekannte Funktionen in der Praxis oft durch diese approximiert. Der Grad der Funktion richtet sich dabei nach der Anzahl der vorliegenden Wertepaare: Die Gleichung einer Funktion n-ten Grades enthält $n+1$ Koeffizienten a_i, für deren Berechnung $n+1$ Gleichungen, also $n+1$ gegebene Wertepaare benötigt werden. Damit lautet die Aufgabe:
Gegeben sind $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Gesucht wird die Funktion

$$f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = f(x)$$

die den $n+1$ Gleichungen $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ genügt. Die x_i heißen *Stützstellen*, die y_i *Stützwerte* der gesuchten Funktion.

Satz 38 (Lösbarkeit)**.** *Sind alle x_i paarweise verschieden, dann lässt sich zeigen, dass das Gleichungssystem stets eine Lösung hat (vergleiche hierzu Abschnitt XXX zur Lösung linearer Gleichungssysteme.)*

Zur Bestimmung der gesuchten Funktion nutzen wir das *Newton'sche Interpolationspolynom*:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) &+ b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\dots \\ &+ b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}} \qquad (*)$$

In $(*)$ werden nacheinander für x die Stützstellen x_1 und die Stützwerte $f(x_i) = y_i$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 = b_0 \\ f(x_1) &= y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\ f(x_2) &= y_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\dots \\ f(x_n) &= y_n = b_0 + b_1(x_n - x_0) + \cdots + b_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Wir veranschaulichen uns das Schema am besten anhand eines Beispiels:

1. Gegeben seien die $n = 3$ Wertepaare $(-1, -19), (1, 7)$ und $(4, 1)$. Gesucht wird also eine ganzrationale Funktion 2-ten Grades. Das Newton'sche Interpolationspolynom $(*)$ ist dann $f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$. Mit den gegeben Stützstellen folgt

$$f(x) = b_0 + b_1(x + 1) + b_2(x + 1)(x - 1).$$

Einsetzen der Werte x_i, y_i $(i = 0, 1, 2)$ ergibt

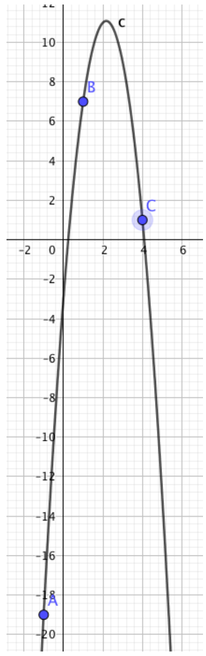
$$\begin{aligned} f(-1) &= -19 = b_0 \\ f(1) &= 7 = b_0 + 2b_1 \\ f(4) &= 1 = b_0 + 5b_1 + 15b_2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schrittweise

$$b_0 = -19, \quad b_1 = \frac{7 - b_0}{2} = 13, \quad b_2 = \frac{1 - b_0 - 5b_1}{15} = -3.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= -19 + 13(x + 1) - 3(x + 1)(x - 1) \\ &= -3x^2 + 13x - 3. \end{aligned}$$



Alternativ zum Newtonschen Interpolationspolynom wird in der Praxis auch die *lineare Interpolation* angwandt. Vergleiche hierzu die Übungen.

3.7 Klassifikation von Funktionen und deren Eigenschaften

Funktionen lassen sich in *algebraische Funktion* und *nicht-algebraischen Funktionen (transzendente Funktionen)* einteilen. Dabei lässt sich jede algebraische Funktion auf die implizite Form

$$F(x, y) = p_n(x)y^n + p_{n-1}y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

bringen, wobei $p_i(x), i = 0, \ldots, n$ ein Polynom i-ten Grades. Ferner differenziert man die Funktionen nach dem Schema in Abbildung 9.
Wir werden die einzelnen Funktionsklassen auf die folgende Eigenschaften hin untersuchen:

1. Definitions- und Wertebereich (Polstellen und Definitionslücken).
2. Symmetrieeigenschaften.
3. Achsenschnittpunkte.
4. Scheitelpunkte
5. Monotonie
6. Verhalten für $x \to \pm\infty$ / Asymptoten.
7. Skizze des Graphen

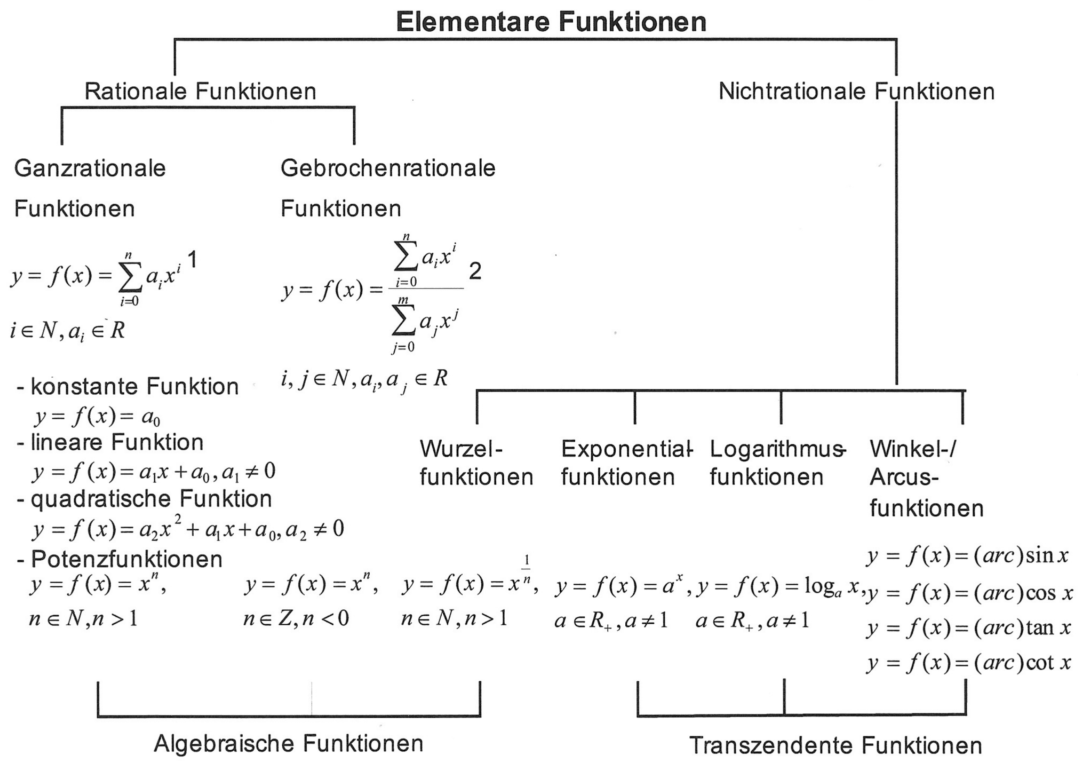


Abbildung 9: Wir werden die elementare Funktionen auf die oben aufgelisteten Eigenschaften untersuchen.

3.7.1 Ganzrationale Funktion n-ten Grades

Ganzrationale Funktion n-ten Grades (oder *Polynome n-ten Grades*) sind Funktionen, in denen auf eine reelle Variable x nur endlich viele Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen angewendet werden. Die *Normalform* ist

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0.$$

1. *Definitions- und Wertebereich*: Ganzrationale Funktionen können auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden.

2. *Symmetrieeigenschaften*: Ganzrationale Funktionen, bei denen nur gerade Exponenten auftauchen, sind gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse. Ganzrationale Funktionen, bei denen nur ungerade Exponenten auftauchen, sind ungerade, d.h. punktsymmetrisch. Vergleiche Abschnitt 3.3. Ganzrationale Funktionen, bei denen gerade und ungerade Exponenten auftauchen, sind nicht symmetrisch. Vergleiche Abschnitt 3.3.

3. *Achsenschnittpunkte*: Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist gegeben durch den Koeffizienten a_0. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion.

   Nach dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich jede ganzrationale Funktion n-ten Grades als Produkt seiner Linearfaktoren schreiben:

   $$f(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_l)^{k_l}, \quad k_i \in \{0, \ldots, n\}$$

   wobei $x_1, \ldots, x_n$ die (komplexen) Nullstellen der Funktion f sind. Die Zahlen $k_i, i = 1, \ldots, l$, heißen *Vielfachheit* der Nullstelle x_i. Es gilt stets $k_1 + \cdots + k_l = n$. Hat eine Nullstelle

   (a) *ungerade Vielfachheit*, so schneidet der Graph die x-Achse an dieser Stelle (für $k \geq 3$ waagerecht) und die Funktionswerte wechseln ihr Vorzeichen.

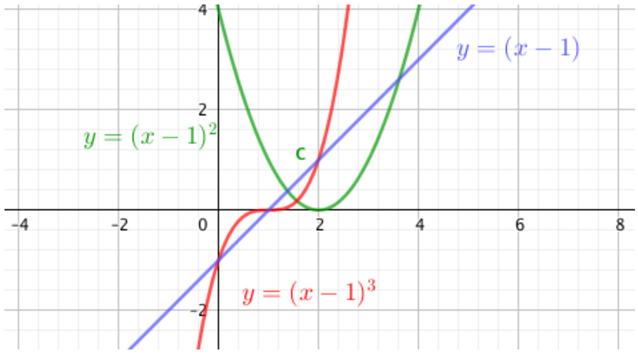
(b) *gerade Vielfachheit*, so berührt der Graph die x-Achse an dieser Stelle und es findet kein Vorzeichenwechsel statt.

(c) *ungerader Vielfachheit*, sp wechselt der Funktionswert das Vorzeichen.

Beispiele:

(a) $f_1(x) = (x-1), f_2(x) = (x-1)^3$

(b) $f_1(x) = (x-1)^2$



Zur Bestimmung der Nullstellen und der reduzierten Form haben wir in Abschnitt 2.2.1 die Polynomdivision kennengelernt. Alternativ lässt sich das *Horner Schema* verwenden. Wie bei der Polynomdivision muss hier eine Nullstelle erraten werden. Wir erklären das Horner Schema anhand zweier Beispiele:

(a) Die Funktion $f(x) = x^3 + 8x^2 - 9x - 72$ hat an der Stelle $x_1 = 3$ eine Nullstelle. Mit dem Horner Schema bestimmen wir die reduzierte Form wie folgt:

$$x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & & & \\ \hline 1 & & & \end{array}, \quad x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & & \\ \hline 1 & & & \end{array}, \quad x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & & \\ \hline 1 & 11 & & \end{array}.$$

$$x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & 33 & \\ \hline 1 & 11 & & \end{array} \ldots \quad x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & 33 & \\ \hline 1 & 11 & 24 & \end{array}, \quad x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & 33 & 72 \\ \hline 1 & 11 & 24 & \end{array}$$

$$x=3 \begin{array}{|cccc} 1 & 8 & -9 & -72 \\ & 3 & 33 & 72 \\ \hline 1 & 11 & 24 & 0 \end{array}.$$

Damit erhalten wir die reduzierte Form $f(x) = (x-3)(x^2+11x+24)$. Durch die Anwendung der $p-q$ Formel erhalten wir die weiteren Nullstelle $x_2 = -3$ und $x_3 = -8$ und damit die Darstellung in Linearfaktoren $f(x) = (x-3)(x+3)(x+8)$.

(b) Die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20$ hat an der Stelle $x_1 = 2$ eine Nullstelle. Mit dem Horner Schema bestimmen wir die reduzierte Form wie folgt:

$$x=2 \begin{array}{|ccccc} 1 & -4 & -9 & 16 & 20 \\ & 2 & -4 & -26 & -20 \\ \hline 1 & -2 & -13 & -10 & 0 \end{array}.$$

Damit erhalten wir die reduzierte Form $f(x) = (x-2)(x^3-2x^2-13x-10)$. Durch ausprobieren erhalten wir eine weitere Nullstelle $x_2 = -2$. Die erneute Amwendung des Horner Schemas

$$\text{führt zu} \quad x=-2 \begin{array}{|cccc} 1 & -2 & -13 & -10 \\ & -2 & 8 & 10 \\ \hline 1 & -4 & -5 & 0 \end{array}.$$

Damit erhalten wir die reduzierte Form $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2-4x-5)$. Über die $p-q$ Formel erhalten wir die beiden weiteren Nullstellen $x_3 = -1$ und $x_4 = 5$, und schließlich die Darstellung in Linearfaktoren $f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)(x-5)$.

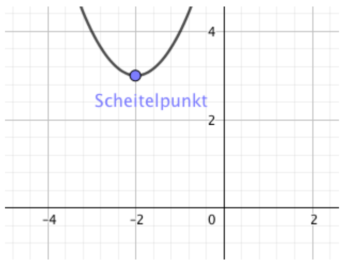
4. *Scheitelpunkte*: Die Scheitelpunkte von ganzrationalen Funktionen werden wir im zweitem Semester mit Hilfe des Ableitungsbegriffs einführen. Lediglich für *quadratische Funktionen* können wir Scheitelpunkte bereits jetzt mit den erlernten Begriffen studieren:

   Wir erinnern uns an einer quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + a_1 x + a_0$. Alternativ kann man eine quadratische Funktion auch in der sogenannten *Scheitelpunktsform*

   $$f(x) = c(x-d)^2 + e, \quad c, d, e \in \mathbb{R}$$

   angeben. Aus dieser Form ist der Scheitpunkt (d, e) sofort ablesbar.

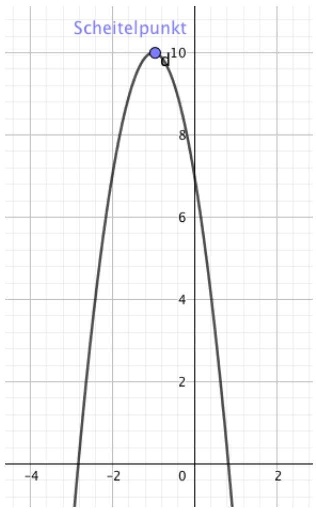
   Wir wollen uns am Beispiel ansehen, wie man aus der Scheitelpunktsform die Normalform berechnet (einfach) und umkehrt aus der Normalform die Scheitelpunktsform (schwieriger):



   (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+2)^2 + 3$ in Scheitelpunktsform. Die Normalform erhält man duch ausmultiplizieren

   $$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 3 = x^2 + 4x + 7.$$

   Da $a_2 = 1 > 0$, ist der zugehörige Graph eine nach oben geöffnete Parabel. Damit handelt es sich beim Scheitelpunkt $(-2, 3)$ gleichzeitig um die *Minimalstelle* der Funktion.



   (b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -3x^2 - 6x + 7$. Um die Scheitelpunktsform anzugeben, benötigt man die Technik der *quadratischen Ergänzung*:

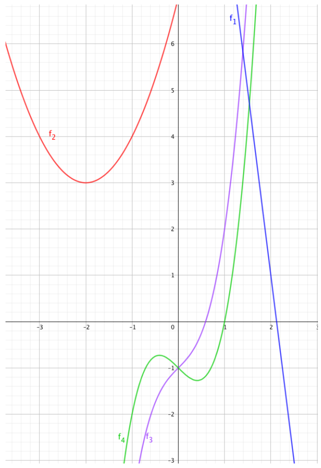
   $$\begin{aligned} y &= -3x^2 - 6x + 7 \\ &= -3(x^2 + 2x) + 7 \\ &= -3\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 7 \\ &= -3(x^2 + 2x + 1) - 3 + 7 \\ &= -3(x^2 + 2x + 1) + 4 \\ &= -3(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

   Damit liegt der Scheitelpunkt der Funktion bei $(-1, 4)$. Da $a_1 = -3 < 0$, ist der zugehörige Graph eine nach unten geöffnete Parabel und der Scheitelpunkt $(-1, 4)$ gleichzeitig die *Maximalstelle* der Funktion.

5. *Monotonie*: Die Monotonieeigenschaften beliebiger ganzrationaler Funktionen werden wir auch erst im zweiten Semester anhand des Ableitungsbegriffs studieren. Vergleiche auch Abschnitt 3.3. Lediglich für lineare und quadratische Funktionen können wir die Monotonie bereits jetzt studieren.

   (a) Lineare Funktionen $f(x) = a_1 x + a_0$ sind streng monoton steigend für $a_1 > 0$ und streng monoton fallend für $a_1 < 0$. Für $a_1 = 0$ haben wir eine konstante Funktion. Diese ist monoton fallend und monoton steigend.

   (b) Quadratische Funktionen $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ sind für $a_2 > 0$ bis zum Scheitelpunkt streng monoton fallend und ab dem Scheitelpunkt streng monoton steigend.



Beispiele:

(a) Die gerade Funktion $f_1(x) = -8x + 17$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend.

(b) Die quadratische Funktion $f_2(x) = x^2 + 4x + 7$ ist auf dem Intervall $[-\infty, -2]$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $[-2, \infty]$ streng monoton steigend.

(c) Die cubische Funktion $f_3(x) = 2x^3 + x - 1$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

(d) Die cubische Funktion $f_4(x) = 2x^3 - x - 1$ ist nicht monoton auf ganz $\mathbb{R}$.

6. *Verhalten für $x \to \pm\infty$ / Asymptoten*: Für ganzrationale Funktionen gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Damit wird das Verhalten den Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ lediglich durch den Koeffizienten a_n beschrieben. Daher wird a_n auch oft als *Leitkoeffizient* bezeichnet.

Beispiele:

(a) $\lim_{x\to\infty}(3x^2 + 6x + 7) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty}(3x^2 + 6x + 7) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 = \infty$.

(b) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + 8x + 1) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty}(-x^3 + 8x + 1) = \infty$.

7. *Skizze des Graphens:* Die Graphen ganzrationaler Funktionen heißen *Parabeln*. Es sind zusammenhängende Kurven, da der Definitionsbereich gegeben ist durch $X = \mathbb{R}$. Die aus den Punkten 1-6 gewonnen Informationen reichen aus, den Graph einer ganzrationalen Funktion zu skizzieren:

(a) Markiere die Nullstellen auf der x-Achse und markiere ob es sich um gerade oder ungerade Nullstellen handelt. Bei geraden Nullstellen berührt der Graph die x-Achse, bei ungeraden Nullstellen schneidet der Graph die x-Achse, wobei der Schnitt für $k = 3, 5, \ldots$ waagerecht verläuft.

(b) Zeichne das Verhalten des Graphens für $x \to \pm\infty$ ein.

(c) Jetzt gibt es nur noch eine Möglichkeit den Graph zu zeichnen!

Beispiele Kurvendiskussion (ganzrationale Funkion)

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$.

Definitions- und Wertebereich Den Defintionsbereich können wir sofort bestimmen: Es gilt $D_f = \mathbb{R}$, da die Funktion f für alle $x \in \mathbb{R}$ defniert ist.

Um den Wertebereich zu bestimmen, untersuchen wir das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Da der Graph einer ganzrationalen Funktion einer durchgehende Kurve ist, werden alle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ angenommen. Damit gilt $W_f = \mathbb{R}$.

Symmetrieeigenschaften Da die Exponenten von x sowohl gerade als auch ungerade sind, liegt keine Symmetrieeigenschaft vor.

Achsenschnittpunkte Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $(0,-1)$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion: Wir berechnen diese mit dem Horner-Schema:

Wir sehen, dass $x_1 = 1$: $\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -3 & -1 \\ x=1 & & 1 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}$.

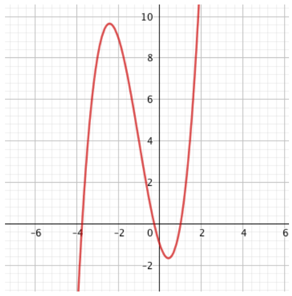
Damit erhalten wir die Darstellung $f(x) = (x-1)(x^2+4x+1)$. Mit der $p-q$ Formel erhalten wir die beiden weiteren Nullstellen $x_2 = -2-\sqrt{3} \approx -3,73$ und $x_3 = -2+\sqrt{3} =\approx -0,27$.

Scheitelpunkte . Können wir nur für ganzrationale Funktionen vom Grad 2 oder kleiner berechnen.

Monotonie : Ganzrationale Funktionen sind jeweils zwischen den Scheitelpunkten monoton.

Verhalten für $x \to \pm\infty$ / Asymptoten . Siehe oben bei der Berechnung des Wertebereichs.

Graphe Mit den aus den Punkten 1 bis 7 gewonnen Informationen können wir den Graph der Funktion skizzieren. Wir beginnen mit den Nullstellen, die jeweils mit Vielfachheit $k = 1$ auftreten. Damit schneidet der Graph die x-Achse an den Stellen x_1, x_2 und x_3 und es findet ein Vorzeichenwechsel des Funktionswerts statt (linke Abbildung). Da wir das Verhalten für $x \to \pm\infty$ kennen, muss an der kleinsten und an der größten Nullstelle das Vorzeichen des Funktionswerts von minus auf plus wechseln. Somit gibt es nur eine Möglichkeit den Graph zu skizieren (rechte Abbildung).



2. Wir betrachten die Funktion $f_1(x) = (x+2)(x-4)(x+8)$. Ausmultiplizieren ergibt $f_1(x) = x^3+6x^2-24x-64$.

Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie Die Funktion ist nicht symmetrisch, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten.

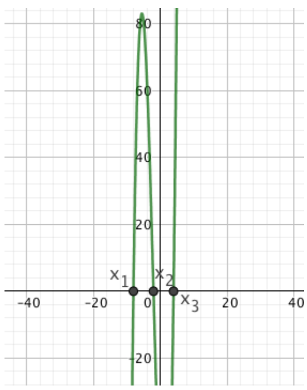
Nullstellen Die Nullstellen kann man aus sofort ablesen, $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = -8$.

Schreibweise in Linearfaktoren Die Funktion $f_1(x)$ ist bereits in der Schreibweise der Linearfaktoren gegeben.

Vorzeichenverhalten um die Nullstellen Alle drei Nullstellen treten mit Vielfachheit 1 auf. Damit schneidet der Graph die x-Achse in den drei Punkten.

Verhalten für $x \to \pm\infty$ Es gilt $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

Graph Um den Graphen zu zeichen, übertragen wir alle oben gewonnen Informationen (Nullstellen bei $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = -8$ jeweils mit Schnitt durch die x-Achse, Verhalten für $x \to \pm\infty$) in ein Koordidantensystem. Anschließend zeichnen wir den Graphen der Funktion.



3. Wir betrachten die Funktion $f_2(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$.

Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie Die Funktion ist nicht symmetrisch, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten.

Nullstellen Die erste Nullstelle erraten wir, $x_1 = 1$. Anschließend wenden wir das Horner-Schema an um die reduzierte Darstellung zu bekomen,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 8 & 6 & -9 \\ x=1 & & 1 & -5 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & 9 & 0 \end{array}.$$

Damit gilt $f_2(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$. Die nächste Nullstelle erraten wir wieder, $x_2 = -1$. Die erneute Anwendung des Horner-Schemas ergibt

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ x=-1 & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}.$$

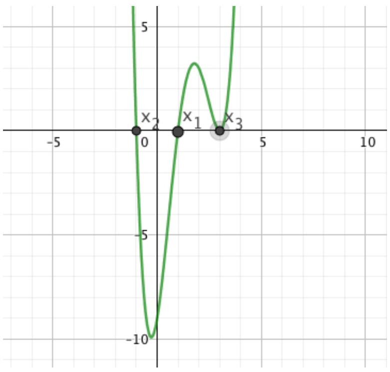
Damit gilt $f_2(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 6x + 9)$. Die zwei weiteren Nullstellen bekommen wir über die $p-q$ Formel, $x_{3/4} = 3$.

Schreibweise in Linearfaktoren Mit den oben berechneten Nullstellen ergibt sich die Schreibweise $f_2(x) = (x-1)(x+1)(x-3)^2$.

Vorzeichenverhalten um die Nullstellen Die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ treten mit Vielfachheit 1 auf. Damit schneidet der Graph die x-Achse in den zwei Punkten. Die Nullstelle $x_3 = 3$ tritt mit Vielfachheit 2 auf. Somit berüht der Graph an der Stelle die x-Achse.

Verhalten für $x \to \pm\infty$ Es gilt $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$.

Graph Um den Graphen zu zeichen, übertragen wir alle oben gewonnen Informationen in ein Koordidantensystem. Anschließend zeichnen wir den Graphen der Funktion.



3.7.2 Gebrochenrationale Funktion

Die Gleichung einer gebrochenrationalen Funktion lässt sich auf die Form bringen

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n a^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m b^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad m, n \in \mathbb{N}, a_n, b_m \neq 0.$$

Im Falle $n \geq m$ spricht man von einer *unecht gebrochenrationaler Funktion*. Im Falle von $n < m$ spricht man von einer *echt gebrochenrationaler Funktion*.

1. *Definitions- und Wertebereich*: Der Defintionsbereich von gebrochenrationalen Funktionen ist eingeschränkt, da im Nenner nicht keine Null stehen darf. Gebrochenrationale Funktionen sind an den Stellen, an denen der Nenner gleich null wird, *unstetig*. Ihr Graph ist dann keine zusammenhängende Kurve mehr, sondern kann in *Äste* zerfallen.

   Eine Nullstelle x des Nenners $N(x)$ heißt *Definitionslücke*. Sie heißt

- *Polstelle*, falls bei der Annäherung an die Stelle x die Äste gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben. Eine Polstelle liegt vor, wenn die Nullstelle des Nenners nicht gleichzeit auch eine Nullstelle des Zählers ist oder die Vielfachheit der Nullstelle im Nenner größer ist als die im Zähler.

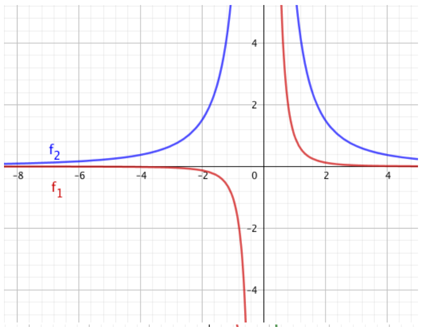
  Es wird zwischen *geraden* und *ungeraden* Polstellen unterschieden, je nachdem ob die Vielfachheit der Nullstelle gerade oder ungerade ist.
- *hebbare Definitionslücke*, falls sich beide Äste von links und rechts auf einen Punkt zubewegen. Eine hebbare Definitionslücke liegt vor, wenn die Nullstelle des Nenners gleichzeit auch eine Nullstelle des Zählers ist und die Vielfachheit gleich ist.

Beispiele:

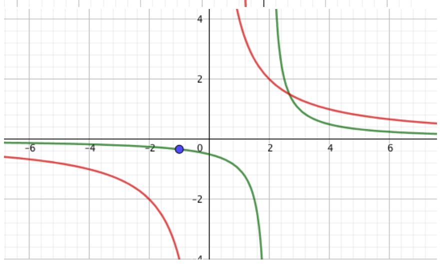
(a) Gebrochenrationale Funktionen vom Typ $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$ sind im Punkt $x = 0$ nicht definiert. Für

  i. ungerade n handelt es sich um einengerade Polstelle. Die Äste streben in die gleiche Richtung (f_1, roter Graph).

  ii. ungerade n handelt es sich um eine ungerade Polstelle. Die Äste streben in entgegengesetze Richtungen (f_2, blauer Graph).



(b) Die Funktion $f(x) = \frac{4x}{x^2}$ (rot) hat an der Stelle $x = 0$ eine *Polstelle*. $x = 0$ ist zwar sowohl eine Nullstelle des Nenners als auch des Zählers. Es handelt sich aber trotzdem um eine Polstelle, da die Vielfach im Nener gleich 2 und im Zähler gleich 1 ist. Damit zerfällt der Graph in zwei Äste.



(c) Die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$ (grün) hat eine hebbare Definitionslücke bei $x = -1$ (blauer Punkt, Nullstelle mit Vielfachheit 1 sowohl des Zählers als auch des Nenners) und eine Polstelle bei $x = 2$ (nur Nulstelle des Nenners).

2. *Symmetrieeigenschaften.* Um die Symmetrieeigenschaften von gebrochenrationalen Funktionen zu untersuchen, mussen zunächst die Symmetrieeigenschaften des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms bestimmt werden. Vergleiche dazu Abschnitt 3.7.1, sowie Übungsaufgabe 24 auf Blatt 4.

   (a) Falls im Nenner und im Zähler eine gerade Funktion steht, dann handelt es sich um eine gerade Funktion.

   (b) Falls im Nenner und im Zähler eine ungerade Funktion steht, dann handelt es sich um eine gerade Funktion.

   (c) Falls im Nenner eine gerade und im Zähler eine ungerade Funktion steht, dann handelt es sich um eine ungerade Funktion.

   (d) Falls im Nenner eine ungerade und im Zähler eine gerade Funktion steht, dann handelt es sich um eine ungerade Funktion.

   (e) Falls entweder im Zähler oder im Nenner keine symmetrische Funktion steht, ist auch die gebrochenrationale Funktion nicht symmetrisch.

3. *Achsenschnittpunkte.* Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist gegeben durch den Ausdruck a_0/b_0. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion. Die Nullstellen gebrochenrationaler sind die Nullstellen des Zählers $Z(x)$, insofern sich nicht gleichzeitig auch Nullstellen des Nenners $N(x)$ sind.

   Beispiel:

(a) $f(x) = \frac{x^3-x^2-21x+45}{x+5}$. Die Nullstellen des Zählers sind $x_1 = x_2 = 3, x_3 = -5$. Da $x = -5$ auch eine Nullstelle des Nenners ist, sind die Nullstellen der Funktion lediglich die Stellen $x_1 = x_2 = 3$. Bei der Stelle $x = -5$ handelt es sich um eine hebbare Definitionslücke.

4. *Scheitelpunkte.* Im Allgemeinen können wir die Scheitelpunkte gebrochenrationaler Funktionen nur mit Hilfe des Ableitungsbegriffes studieren. Manchmal lässt sich die Funktion aber auf eine quadratische Funktion zurückführen:

   (a) Die Funktion $f(x) = \frac{x^3-x^2-21x+45}{x+5}$ hat die alternative Schreibweise $f(x) = x^2 - 6x + 9$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$. Da es sich um eine Parabel handelt, können wir den Scheitelpunkt leicht berechnen, indem wir die Gleichung in die Scheitelpunktform überführen, $f(x) = (x-3)^2$.

5. *Monotonie*: Im Allgemeinen können wir noch keine Aussagen über die Monotonie machen.

6. *Verhalten für $x \to \pm\infty$ / Asymptoten*:

   Die Graphen von gebrochenrationalen Funktionen haben *Asymptoten*, d.h. sie nähern sich dem Graphen dieser Asymptote beliebig nah an. Die Asymptoten werden durch das Verhalten der Funktion für $x \to \infty$ ('x strebt gegen ∞') bzw. $x \to -\infty$ bestimmt.

   Jede unecht gebrochenrationale Funktion kann zerlegt werden in die Form

   $$f(x) = P_{n-m}(x) + \tilde{f}(x),$$

   wobei $P_{n-m}(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade $n-m$ und $\tilde{f}(x)$ eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Die Zerlegung von f wird mit Hilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema durchgeführt.

   Es gilt:

   Fall $n < m$: $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Die Asymptotengleichung lautet also $y_A = 0$.

   Fall $n = m$: $f(x) \to \frac{a_n}{b_n}$ für $x \to \pm\infty$. Die Asymptotengleichung lautet also $y_A = \frac{a_n}{b_n}$.

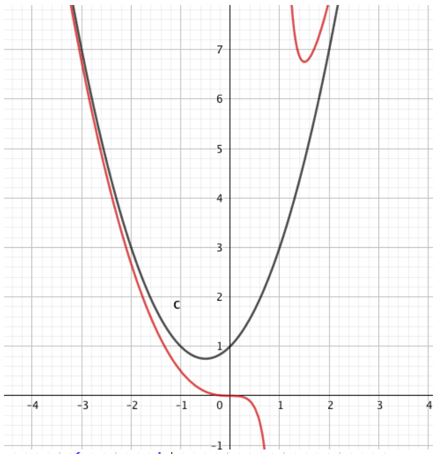
   Fall $n > m$: $f(x) \to P_{n-m}$ für $x \to \pm\infty$. Die Asymptotengleichung lautet also $y_A = P_{n-m}$.

Beispiele:

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Durch Polynomdivision erhalten wir die Form

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^3 \right) : \left(x - 1 \right) = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x-1} \\ \underline{-\,x^3 + x^2} \\ \qquad x^2 \\ \quad \underline{-\,x^2 + x} \\ \qquad\quad x \\ \qquad \underline{-\,x + 1} \\ \qquad\qquad 1 \end{array}$$

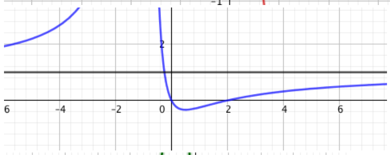
Für $x \to \pm\infty$ geht der letzte Summand gegen Null. Damit ist die Asymptote gegeben durch die Funktion $y_A = x^2 + x + 1$.



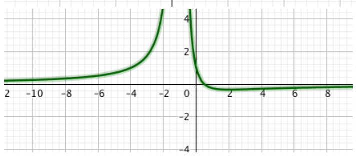
(b) Gegeben sei die Funktion $\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$. Durch Polynomdivision erhalten wir die Form

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2 - 2x \right) : \left(x^2 + 2x + 1 \right) = 1 + \dfrac{-4x-1}{x^2+2x+1}. \\ \underline{-\,x^2 - 2x - 1} \\ \qquad -\,4x - 1 \end{array}$$

Für $x \to \pm\infty$ geht der letzte Summand gegen Null. Damit ist die Asymptote gegeben durch die Funktion $y_A = 1 = a_0/b_0$



(c) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+2x+1}$. Für $x \to \pm\infty$ strebt die Funktion gegen Null. Damit gilt $y_A = 0$



Beispiele Kurvendiskussion (gebrochenrationale Funktionen)

1. Wir betrachten die Funktion $f_1(x) = \frac{x^2-2x}{2x+1}$.

Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-0.5\}$.

Symmetrie Die Funktion ist nicht symmetrisch. (Weder Zählerpolynom noch Nennerpolynom sind symmertrisch.)

Nullstellen Wir setzen den Zähler gleich Null:

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = 0, x_2 = 2$$

Schreibweise in Linearfaktoren $f_1(x) = \frac{x^2-2x}{2x+1}$

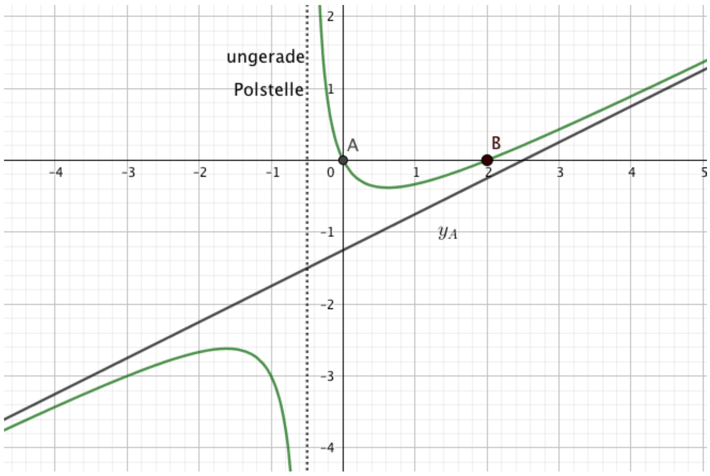
Asymptote Um die Asymptote zu bestimmen führen wir eine Polynomdivision aus:

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2 - 2x \right) : \left(2x + 1 \right) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \dfrac{\frac{5}{4}}{2x+1} \\ \underline{-\,x^2 - \frac{1}{2}x} \\ \qquad -\,\frac{5}{2}x \\ \qquad \underline{\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}} \\ \qquad\qquad \frac{5}{4} \end{array}$$

Damit gilt $y_A = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

Polstelle An der Stelle $x = -0.5$ handelt es sich um eine ungerade Polstelle. ($x = -0.5$ ist eine Nullstelle des Nenners mit ungerader Vielfachheit, und keine Nullstelle des Zählers.)

Graph Um den Graphen zu zeichnen, übertragen wir alle oben gewonnenen Informationen (Nullstellen bei $x_1 = 0, x_2 = 2$, ungerade Polstelle bei $x = -0.5$, Asymptote $y_A = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$) in ein Koordinatensystem (schwarz). Anschließend zeichnen wir den Graphen der Funktion (grün).



2. Wir betrachten die Funktion $f_2(x) = \frac{20x-20}{x^3}$

   Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   Symmetrie Die Funktion ist nicht symmetrisch. (Das Zählerpolynom ist nicht symmertrisch.)

   Nullstellen Wir setzen den Zähler gleich Null:

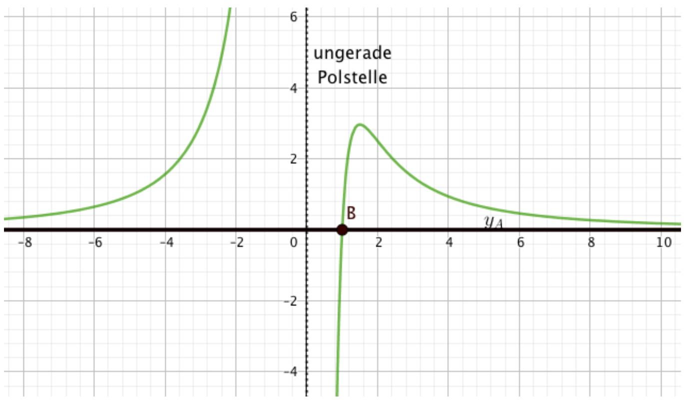
$$20x - 20 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = 1$$

   Schreibweise in Linearfaktoren $f_1(x) = \frac{20(x-1)}{x^3}$

   Asymptote Der Grad des Nennerpolynoms ist höher als der Grad des Zählerpolynoms. Damit gilt $y_A = 0$

   Polstelle An der Stelle $x = 0$ handelt es sich um eine ungerade Polstelle. ($x = 0$ ist eine Nullstelle des Nenners mit ungerader Vielfachheit, und keine Nullstelle des Zählers.)

   Graph Um den Graphen zu zeichnen übertragen wir alle oben gewonnenen Informationen (Nullstelle bei $x_1 = 1$, ungerade Polstelle bei $x = 0$, Asymptote $y_A = 0$) in ein Koordinatensystem (schwarz) ein. Anschließend zeichnen wir den Graphen der Funktion (grün).



3.7.3 Exponentialfunktion

Eine Exponentialfunktion ist gegeben durch die Funktionsgleichung $f(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$.

1. *Definitionsbereich:* Eine Exponentialfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Damit gil $D_f = \mathbb{R}$. Die Funktionswerte sind alle positiv, es gilt $W_f = (0, \infty)$.

2. *Symmetrie:* Exponentialfunktionen sind nicht symmetrisch.

3. *Achsenschnittpunkte:* Der Schnittunkt mit der y-Achse liegt bei $f(0) = b^0 = 1$. Da die Null nicht im Wertebereich liegt, schneidet der Graph auch nicht die x-Achse.

4. *Scheitelpunkte:* Exponentialfunktionen haben keine Scheitelpunkte.

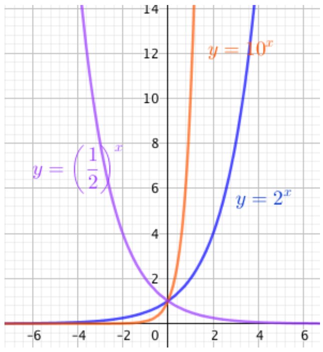
5. *Monotonie*: Für $b > 1$ ist die Exponentialfunktion streng monoton steigend, und für $b < 1$ streng monoton fallend.

6. *Verhalten für $x \to \pm\infty$:* Wir unterscheiden die Fälle $b > 1$ und $b \in (0, 1)$:

   (a) Für $b > 1$ gilt: $\lim_{x\to-\infty} b^x = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} b^x = \infty$.

   Für Für $b \in (0, 1)$ gilt: $\lim_{x\to-\infty} b^x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} b^x = 0$.

7. *Graph:*
   Der Graph einer Exponentialfunktion ist eine durchgehenden Kurve, die stets durch den Punkt $(0, 1)$ geht.



Die Gleichung $y = b^x$ läßt sich auf eine Gleichung mit der Basis e zurückführen:

$$y = b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{\ln b \cdot x} \quad \text{mit } \ln b = k \quad \Longrightarrow y = e^{kx}.$$

Die allgemeine Form der Exponentialfunktion lautet daher

$$f : y = ce^{kx}, \quad c > 0, k \neq 0,$$

wobei wir mit den Parameter c den Schnittpunkt durch die y-Achse variieren können.

Exponentialfunktionen haben große Bedeutung für die mathematische Beschreibung von Vorgängen in der Naturwissenschaft und Technik. Sie beschreiben zum Beispiel Wachstumsprozesse. Beispiele:

1. Eine Bakterienkultur wächst in 1 Stunde um 75%. Zu Beginn des Experiments sind $9 \cdot 10^8$ Bakterien vorhanden. Damit lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = c_0 \cdot a^x$ mit $c_0 = 9 \cdot 10^8$ und $a = 1.75$. Nach $t = 12$ Stunden ist die Baktierienkultur auf $9 \cdot 10^8 \cdot (1.75)^{12} \approx 7.410^{11}$ gewachsen.

2. Der Luftdruck der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe um ca. 13% je 1 000m Höhenunterschied ab. Der Luftdruck in Meereshöhe beträgt durchschnittlich 1 013 hPa (Hektopascal). Gesucht ist die zugehörige Funktionsgleichung und der Luftdruck auf dem Mount Everest (ca. 8 800m) sowie die Veränderung des Lufdrucks pro Meter.

   Die zugehörige Funktionsgleichung lautet $f(x) = c_0 \cdot a^x$ mit $c_0 = 1\,013$ und $a = 0,87$. Damit gilt $f(8\,800) = 1\,013 \cdot (0.87)^{8800} = 297,4\text{hPa}$.

   Für 1000m ist der Abnahmefaktor $a = 0.87$. Für 1 Meter sei er a_1. Es muss gelten $a_1^{1000} = a \Longleftrightarrow a_1 = \sqrt[1000]{0,87} = 0.99986$.

Die *Logarithmusfunktion*

$$f : y = \log_b x, \quad b > 0, b \neq 1$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = b^x$.

4 Goniometrie und Trigonometrie

4.1 Winkelmaße

Der Winkel zwischen zwei Schenkeln p und q wird mit $\measuredangle(p,q)$ bezeichnet. Das Winkelinnere ist der Teil der Ebene, der bei einer mathematisch positiven Drehung (entgegen den Uhrzeigersinn!) von p überstrichen wird, bis er mit q zusammenfällt. Für $p = q$ entsteht der Nullwinklen α_0 oder der Vollwinkel α_v. Die Größe eines Winkels wird entweder in Grad, Gon oder mit Hilfe des Bogenmaßs angegeben.

Ein *Grad* (in Zeichen $1°$) ist der 360ste Teil des Vollwinkels. Es gilt $1° = 60'$ Minuten und $1' = 60''$ Sekunden.

Ein *Gon* (in Zeichen 1gon) ist der 400st Teil des Vollwinkels. Der 1000st Teil des Gon heißt Milligon. Es gilt $0,001\text{gon} = 1\text{mgon}$.

Im Kreis mit dem Radius r sei b der zum Winkel α gehörende Bogen. Das Verhältnis b/r ist eine von der Größe r unabhängige Größe (vergleiche dazu diese GeoGebra Arbeitsblatt). Ein *Radiant* ist die Größe des Winkels, für den $b/r = 1$ gilt. Zum Vollwinkel α_v gehört also Bogen der Kreisumfang $U = 2\pi r$. Damit gilt $\alpha_v = 360° = \frac{b}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ und folglich

$$360° = 2\pi, \quad 180° = \pi, \quad ,90° = \frac{\pi}{2}, \quad 45° = \frac{\pi}{4}, \dots$$

Beispiele:

1. Der Winkel $\alpha = 36,1594°$ ist in die Einheit Radiant umzurechnen.

   Lösung: $\alpha = 36,1594 \cdot 1° = 36,1594 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} = 0,63110\text{rad}$.

Für die folgenden Betrachtungen wählen wir den Einheitskreis mit Radius $r = 1$.

4.2 Trigonometrische Funktionen

Trigometrische Funktionen können wie andere irrationale Funktionen durch unendliche Reihen definiert werden (das machen wir im zweiten Semester). Im folgenden werden sie anschaulich als Verhältnisse der Maßzahlen von Strecken definiert.
Wir legen ein *kartesisches Koordiantensystem* mit dem Ursprung 0 und den Achsen u, v (die Bezeichnungen x, y lassen wir für die Variablen frei) und den vier Quadranten (Zählung erfolgt gegen den Uhrzeigersinn mit den Bezeichnungen I./II./III./IV.). Ferner betrachten wir ein *Polarkoordinatensystem* mit dem Pol 0 und dem Winkel x. Ein beliebiger Punkt P hat die kartesischen Koordinaten u, v mit $u, v \in \mathbb{R}$ und die Polarkoordianten r, x mit $r \in (0, \infty)$ und $x \in [0, 2\pi]$, wobei x ist der in Radiant gemessene Winkel ist (vergleiche Abbildung 10).

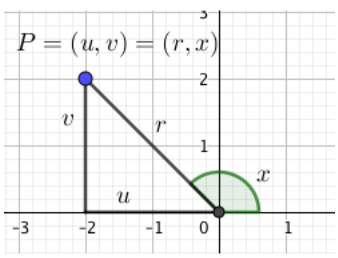


Abbildung 10: Der Punkt P kann in kartesischen Koordinaten $P = P(u, v)$ oder in Polarkoordinaten $P = P(r, x)$ angegeben werden.

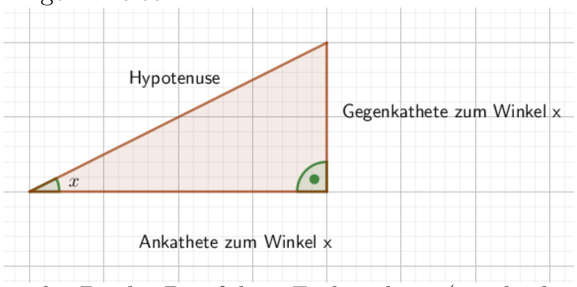
Definition 39 (Trigonometrische Funktionen)**.** *Gegeben sei die obige Situation. Wir definieren die* Sinusfunktion*, die* Cosinusfunktion*, die* Tangensfunktion *und die* Cotangensfunktion *in Abhängigkeit des Winkels x durch die folgenden Streckenverhältnisse*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(x) = \dfrac{v}{r}, & \tan(x) = \dfrac{v}{u} \\ \cos(x) = \dfrac{u}{r}, & \cot(x) = \dfrac{u}{v} \end{array}}$$

Wegen $r > 0$ hängen die Vorzeichen der Funktionswerte von den Vorzeichen von u und v ab. Zum Beispiel ist für einen Winkel im II. Quadranten $u < 0, v > 0$ und $\sin(x) > 0, \cos(x) < 0, \tan(x) < 0, \cot(y) < 0$ (vergleiche Übungsaufgaben.) Mit dem Taschenrechner erhält man die Funktionswerte mit den Tasten $\boxed{\sin x}$, $\boxed{\cos x}$, $\boxed{\tan x}$ *und* $\boxed{\cot x}$. Wichtig ist vorher das Winkelmaß richtig einzustellen!

Für spitze Winkel x, d.h. wenn P im I. Quadranten liegt, enthält die obige Definition die bekannte Erklärung der trigonometrischen Funkionen im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \tan(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



Wird in Abbildung 10 der Radius $r = 1$ gesetzt, dann liegt der Punkt P auf dem *Einheitskreis* (vergleiche Abbildung 11).

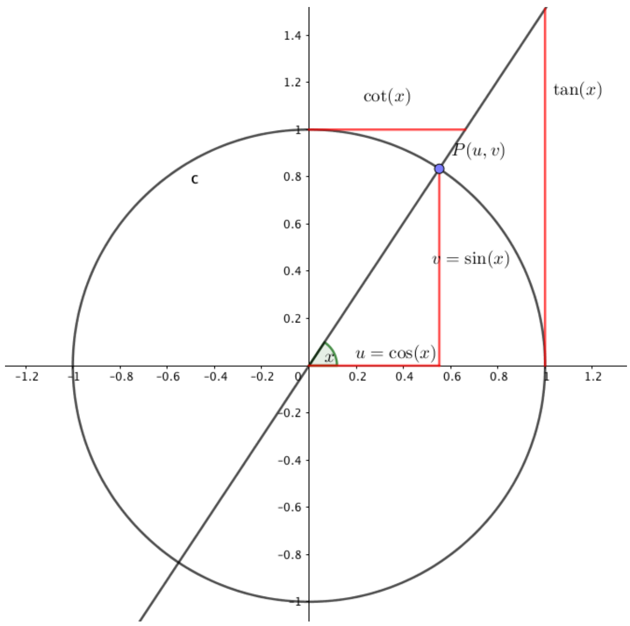


Abbildung 11: Definition der trigonometrische Funktionen am Einheitskreis. Für einen Punkt $P(u, v)$ gilt stets $u = \cos(x)$ und $v = \sin(x)$. Die Funktionswerte von $\tan(x)$ und $\cot(x)$ sind kann man ebenfalls ablesen. Dabei muss man allerdings eigenständig das Vorzeichen bestimmen, je nachdem in welchem Quadranten der Punkt P liegt (vergleiche GeoGebra Arbeitsblatt `https://ggbm.at/Ag5vrNa5`)

.

4.3 Kurvendiskussion

Einen guten Überblick über die Werteverteilung bieten die die Graphen der trigonometrischen Funktionen (vergleiche Abbildung12). Im folgenden wollen die die Graphen der trigonometrischen Funktionen genauer studieren:

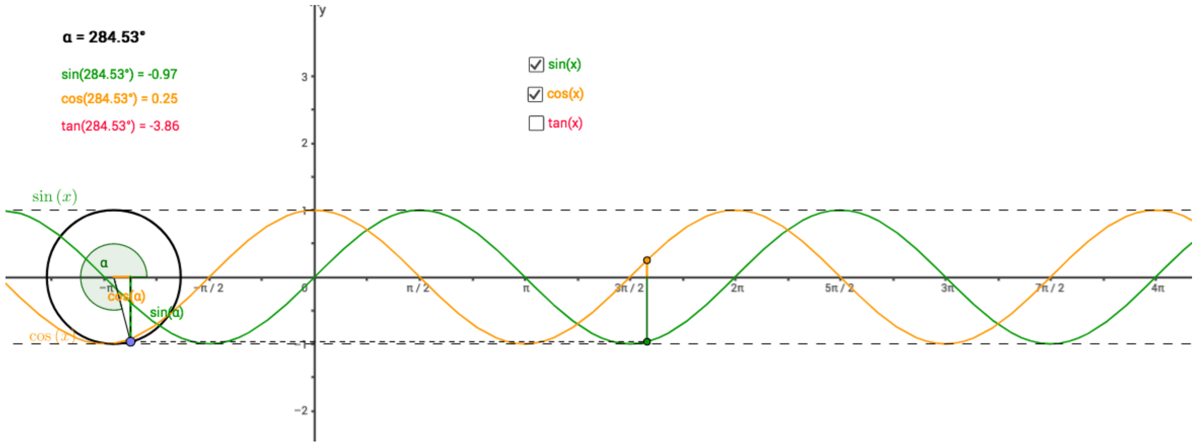


Abbildung 12: Die Graphen der trigonometrischen Funktionen (vergleiche GeoGebra Arbeitsblatt `https://www.geogebra.org/m/dkYHuRSp`).

1. *Definitions- und Wertebereich:* Wegen $r > 0$ sind die Sinus- und die Cosinusfunktion für beliebige Winkel $x \in \mathbb{R}$ definiert, also stetige Funktionen. Da stets $|u| \leq r$ und $|v| \leq r$, gilt $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

   Die Tangensfunktion ist für $u = 0$ nicht definiert, also unstetig für $x = \pi/2, 3/2\pi, \ldots$. Die Cotangensfunktion ist für $v = 0$ nicht definiert, also unstetig für $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Der Wertebereich für die Tangens- und die Cotangensfunktion ist $\mathbb{R}$.

2. *Achsenschnittpunkte:* Für die Schnittpunkte mit der y-Achse gilt

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0, \qquad & \cos(0) &= 1 \\ \tan(0) &= 0, \qquad & \cot(0) &\text{ nicht definiert} \end{aligned}$$

   Für die Schnittpunkte mit der x-Achse gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 0 \text{ für } x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}, \qquad & \cos(x) &= 0 \text{ für } x = (k - 1/2) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \\ \tan(x) &= 0 \text{ für } x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}, \qquad & \cot(x) &= 0 \text{ für } x = (k - 1/2) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. *Symmetrie:* Für die *Funktionswerte negativer Winkel* gelten folgende Beziehungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), \qquad & \cos(-x) &= \cos(x) \\ \tan(-x) &= -\tan(x), \qquad & \cot(-x) &= -\cot(x) \end{aligned}}$$

   Die Cosinusfunktion ist demnach eine gerade Funktion, während die drei anderen trigonometrischen Funktionen ungerade sind.

4. *Verhalten für $x \to \pm\infty$:* Die trigonometrischen Funktionen sind auch für Winkel größer als 2π und für negative Winkel definiert. Wird in Abbildung 10 der Winkel x um $2\pi, 4\pi, 6\pi$, etc. vergrößert, so ergibt sich jeweils der gleiche Punkt. Allgemein gelten für $k \in \mathbb{Z}$ folgende *Periodizitäten*:

$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x),$	$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$
$\tan(x + k \cdot \pi) = \tan(x),$	$\cot(x + k \cdot \pi) = \cot(x)$

5. *Scheitelpunkte:* Da die Sinus- und Cosinusfunktion symmetrisch sind, liegen die Scheitelpunkte der Funktionen genau zwischen zwei Nullstellen. Damit liegen die Scheitelpunkte der Sinusfunktion bei $x = (k - 1/2) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, und die der Cosinusfunktion bei $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.4 Die allgemeine Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist zur Darstellung von Schwingungsvorgängen (z.B. in der Elektrotechnik, Mechanik oder Optik) besonders geeignet. Zur mathematischen Beschreibung von sogenannten *harmonischen Schwingungen* betrachten wir die *allgemeine Sinusfunktion*

$$f(x) = a(bx + c).$$

Die unabhängige Variable x stellt im Allgemeinen die Zeit dar und wird daher oft alternativ mit t bezeichnet. Ausgehend von der Funktion $y = \sin(x)$ betrachten wir die selben Transformationen, die wir bereits in Abschnitt 3.5 kennengelernt haben:

a**:** Für $|a| > 1$ erfolgt eine Dehnung, für $|a| < 1$ eine Stauchung in y-Richtung. Für $a < 0$ erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse.

b**:** Für $|b| > 1$ erfolgt eine Stauchung, für $|b| < 1$ eine Dehnung in x-Richtung um jeweils das $1/|b|$-fache. Für $b < 0$ erfolgt eine Spiegelung an der y-Achse. Die ursprüngliche Periode $p = 2\pi$ verändert sich zu $p = 2\pi/(|b|)$.

c**:** c bewirkt eine Verschiebung in Richtung der x-Achse um den Wert $-c/b$.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{7}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$

1. *Definitions- und Wertebereich:* Die Funktion $f(x)$ ist wie alle Sinusfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Der Wertebereich ist $[-7/3, 7/3]$, da der Graph um den Faktor $a = 7/3$ in y-Richtung gedehnt ist.

2. *Achsenschnittpunkte:* Für die y-Achse ergibt sich der Schnittpunkt bei $f(0) = \frac{7}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{6} = 1,1667$.

   Die Nullstellen der Sinusfunktion sind gegeben durch $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Damit liegen die Nullstellen der Funktion $f(x)$ bei

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} &= k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4}(6k - 1), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. *Symmetrie:* Die Funktion $f(x)$ ist weder gerade noch ungerade. Als allgemeine Sinusfunktion weist sie dennoch eine natürlich Symmetrie auf: Punktsymmetre zum Punkt $(-\pi/4, 0)$.

4. *Scheitelpunkte:* Die Scheitelpunkte der Sinusfunktion liegen genau zwischen den Nullstellen, also bei $x = \frac{\pi}{2}(1 + 3k)$.

5. *Periode:* Der Graph wird um den Wert $-c/b = -\pi/4$ entlang der x-Achse verschoben. Damit ist die Periode $p = 3\pi$.

6. *Graph:* Abbildung 13 zeigt den Graphen der allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = \frac{7}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$.

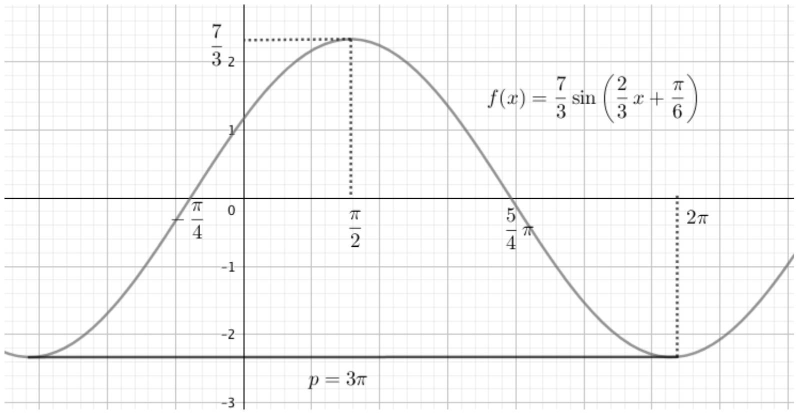


Abbildung 13: Die Funktion wird um den Faktor $a = 7/3$ in y-Richtung gestreckt, um den Faktor $b = 2/3$ in x-Richtung gedehnt und um den Wert $-c/b = -\pi/4$ entlang der x-Achse verschoben. Die Periode ist $p = 3\pi$. Diese Informationen reichen aus um den Graphen zu skizzieren.

4.5 Arcusfunktionen (Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen)

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen *zyklometrische Funktionen* oder *Arcusfunktionen*. Die letztere Bezeichnung lässt sich aus dem Satz erklären:

'**y** ist der Winkel (Bogen, **Arc**us), dessen **Sin**us gleich x ist.'

Zum Beispiel lässt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

auch schreiben in der Form

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

Auf dem Taschenrechner enthält man die jeweiligen Funktionswerte mit den Tasten $\boxed{\arcsin x}$, $\boxed{\arccos x}$, $\boxed{\arctan x}$ und $\boxed{\mathrm{arccot} x}$.
Nach Abschnitt 3.4.2 lassen sich Funktionen nur in denjenigen Intervallen eindeutig umkehren, in denen die Funktionen streng monoton sind.

- Die Arcussinusfunktion ist daher im Intervall $[-1, 1]$ definiert. Die Funktionswerte liegen im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.
- Die Arcuscosinusfunktion ist daher im Intervall $[-1, 1]$ definiert. Die Funktionswerte liegen im Intervall $[0, \pi]$.
- Die Arcustangensfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Funktionswerte liegen im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$.
- Die Arcuscotangensfunktion ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Funktionswerte liegen im Intervall $(0, \pi)$.

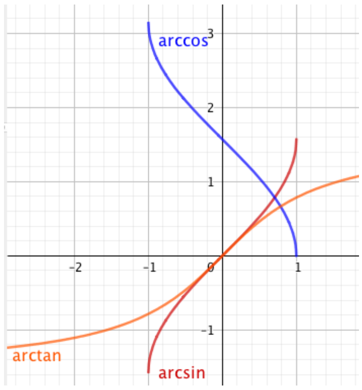


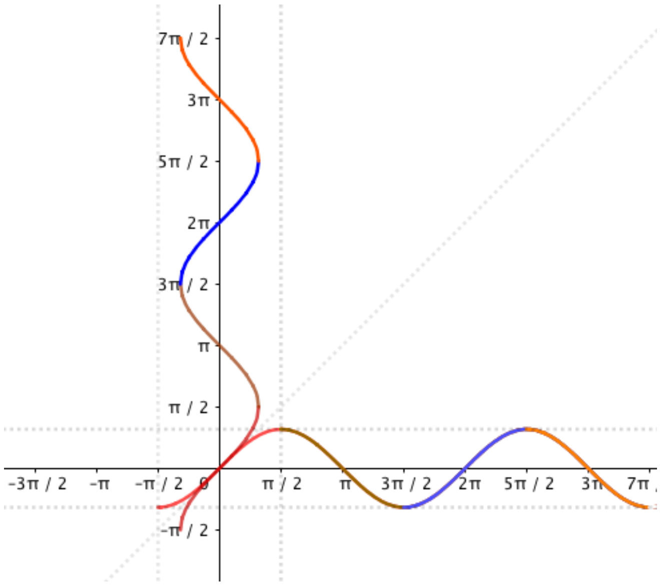
Abbildung 14: Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen Arcusfunktionen.

Aus Abbildung 14 sind die folgenden Relationen abzulesen:

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= \arccos(x) - \frac{\pi}{2}\\ \arccos(-x) &= \arcsin(x) + \frac{\pi}{2}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Lässt man sich mit `WolramAlpha` die Umkehrtfunktion des Sinus berechnen, dann erscheint die Spiegelung der Sinuskurve $\sin(x)$ an der Diagonalen $y = x$. Dabei handelt es sich um eine stückweise definierte Funktion:

$\arcsin(x)$	rot
$\arcsin(-x) + \pi$	braun
$\arcsin(x) + 2\pi$	blau
$\arcsin(-x) + 3\pi$	orange



4.6 Quadrantenrelationen

Quadrantenrelationen sind Gleichungen zwischen Funktionswerten solcher Winkel, die sich entweder um Vielfaches von $\pi/2$ unterscheiden oder zu Vielfachen von $\pi/2$ ergänzen. Aus Abbildung 11 kann man relativ einfach die folgenden Relationen ablesen:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\cot(x)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\tan(x)\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$\boxed{\begin{aligned}|f(\pi \pm x)| = |f(2\pi \pm x)| = |f(x)|\\ \left|f\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)\right| = \left|f\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right)\right| = |co - f(x)|.\end{aligned}}$$

wobei $f(x)$ eine der vier trigonometrischen Funktionen und $co - f(x)$ die entsprechende Cofunktion beschreibt. Dabei bilden jeweils der Sinus und Cosinus, sowie der Tangens und Cotangens ein Paar aus

Funktion und Cofunktion.

Beispiele:

1. Es gilt $\sin(x+3\pi) = -\sin(x)$
2. Es gilt $\sin(-x+9/2\pi) = \cos(x)$
3. Es gilt $|\cos(3/2\cdot\pi - x)| = |\sin(x)|$. Für einen spitzen Winkel x liegt der Winkel $3/2\cdot\pi - x$ im III. Quadranten. Also $\cos(3/2\cdot\pi - x) < 0$ und folglich $\cos(3/2\cdot\pi - x) = -\sin(x)$.
4. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha+450^\circ)}{\sin(\alpha-450^\circ)} &= \frac{\sin(\alpha+90^\circ+450^\circ)}{\sin(\alpha-450^\circ+720^\circ)}\\ &= \frac{\sin(\alpha+90^\circ)}{\sin(\alpha+270^\circ)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -1\end{aligned}$$

4.7 Trigonometrische Gleichungen

Um trigonometrische Gleichungen nach x aufzulösen lernen wir zunächste zwei Hilfreiche Werkzeuge kennen:

4.7.1 Trigometrischer Pythagoras

Mit Hilfe des ersten Werkzeugs kann jeder Funktionswert eines Winkels durch einen der drei anderen Funktionswerte ausgedrückt werden.
Aus Definition 39 folgt

$$\sin(x) = \frac{v}{r}, \quad \cos(x) = \frac{u}{r}.$$

Quadrieren und Addieren führt zu

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2+u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Damit ergibt sich der *Trigometrischer Pythagoras*

$$\boxed{1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)}$$

Nach $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ aufgelöst ergibt sich

$$\sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)}, \quad \cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}.$$

Weiter gilt

$$\tan(x) = \frac{v}{u} = \frac{v/r}{u/r} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

also

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

Die oben genannten Beziehungen sind hilfreich beim Lösen von trigonometrischen Gleichungen. Beispiele:

1. Gegeben sei die Gleichung $\cos^2(x) + \sin(x) + 1 = 0$. Wir ersetzen $\cos^2(x)$ durch $1 - \sin^2(x)$ und erhalten die äquivalente Gleichung

$$1 - \sin^2(x) + \sin(x) + 1 = \sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$$

Um die Gleichung zu lösen, substituieren wir $sin(x) = t$. Damit erhalten wir die quadratische Gleichung $t^2 - t - 2 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = -1$. Die Resubstituierung führt lediglich zu $\sin(x) = -1$, da $\sin(x) = 2$ keine Lösung hat. Mit $\arcsin(-1) = -\pi/2$ ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{x \mid x = -\pi/2 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Gegeben sei die Gleichung $\sqrt{3}\cos(x) = 1 - \sin(x)$. Damit die Gleichung nur noch eine trigonometrische Funktion enthält, ersetzen wir

$$\pm\sqrt{3}\sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1 - \sin(x).$$

Durch Substitution $t = \sin(x)$ entsteht eine Wurzelgleichung

$$\pm\sqrt{3}\sqrt{1 - t^2} = 1 - t.$$

Durch Quadrieren und Umformen ergibt sich

$$\begin{aligned} 3(1 - t^2) &= 1 - 2t + t^2 \\ 4t^2 - 2t - 2 &= 0 \\ t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} &= 0 \\ t_{1/2} &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}, \quad t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \le x \le 2\pi$ folgt durch Resubstituierung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \\ x_2 &= \arcsin(-1/2) = \frac{7}{6}\pi, \quad x_3 = \frac{11}{6}\pi. \end{aligned}$$

Da eine Wurzelgleichung vorliegt, muss eine Probe gemacht werden.

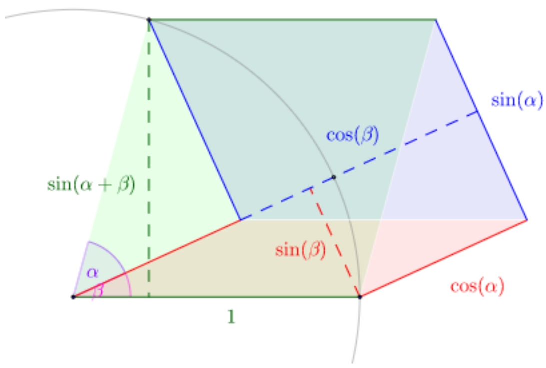
Die Probe zeigt, dass nur x_1 und x_3 Lösungen sind, die sogenannnten *Hauptlösungen*. Wegen der Periodizität der Sinusfunktion ist die Mengge der *allgemeinen Lösungen* gegeben durch $L = \{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.7.2 Additionstheoreme

Das zweite Werkzeug ermöglich es den Funktionswert der Summe zweier Winkel durch die Funktionswerte der einzelnen Winkel anzugeben, z.B. $\sin(x + y)$ durch $\sin(x)$ und $\sin(y)$. Die hierzu benötigten Beziehungen heißen *Additionstheoreme*:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x - y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x) \\ \cos(x - y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x) \end{aligned}}$$

Wir wollen das erste Additionstheorem mit Hilfe von Flächenbeziehungen beweisen. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung:



Man erkennt leicht, dass der Flächeninhalt des grünen Parallelograms gleich der Summe der Flächeninhalte der zwei anderen Paralelograms ist. Um das erste Additionstheorem zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass der Flächeninhalt des grünen Paraellograms gleich $\sin(\alpha + \beta)$ ist, und die Flächeninhalte der zwei anderen Paraellograms durch $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ bzw. $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ gegegen sind:

Wir erinnern uns zunächst daran, wie man den Flächeninhalt eines Parallelograms berechnet. Es gilt

$$A = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \sin(\alpha) \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Gegenseite}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
A_{\text{rot}} &= \sin(\beta) \cdot 1 \cdot \cos(\alpha) \\
A_{\text{blau}} &= \sin(\pi/2 + \beta) \cdot 1 \sin(\alpha) = \cos(\beta) \cdot 1 \sin(\alpha) = \\
A_{\text{grün}} &= \sin(\alpha + \beta) \cdot 1 \cdot 1
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Wir betrachte die Gleichung $3\sin(2x) = 5\tan(x)$. Mit den oben behandelten Umformungen

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
6\sin(x)\cos(x) &= 5\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
6\sin(x)\cos^2(x) &= 5\sin(x) \\
\sin(x)(6\cos^2(x) - 5) &= 0.
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren entstehen zwei Gleichungen

$$\sin(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad 6\cos^2(x) - 5) = 0$$

$$\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_3 &= 0,421 & x_5 &= 2,721 \\ x_2 &= \pi & x_4 &= 5,863 & x_6 &= 3,562. \end{aligned}$$

Die Hauptlösungen sind damit gegeben durch $L = \{0; 0,421; 2,721; \pi; 5,863; 3,562\}$

5 Komplexe Zahlen

5.1 Imaginäre Zahlen

Wir erinnern uns an die Definition der imaginären Einheit aus Abschnitt 1.5.3. Die *imaginäre Einheit* i durch $i^2 := -1$ definiert. Damit gilt beispielsweise $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$.

Definition 40 (Imaginäre Zahlen)**.** *Alle Zahlen $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißen* imaginäre Zahlen*.*

Das Produkt einer reellen Zahl b mit i wird auch als *rein imaginäre Zahl bi* bezeichnet. Damit ergbit sich ein zum Bereich der reellen Zahlen *gleichmächtiger* Zahlenbereich. Die Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahle gelten daher auch für imaginäre Zahlen.

Für die imaginäre Einheit gilt

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad i^5 = i \ldots$$

Allgemein haben wir die Formeln

$$\boxed{i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad , i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}}$$

Ist der Nenner eines Bruches imaginär, so erweitert man mit einer geeigneten Potenz von i.
Beispiele:

1. $\frac{1}{i} = \frac{i^3}{i^4} = -i$
2. $\frac{1}{i^6} = \frac{i^2}{i^8} = -1$

5.2 Arithmetische Form komplexer Zahlen

Die uneingeschränkte Anwendung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion auf reelle und imaginäre Zahlen für zu der komplexen Zahl $z = a + bi$.

Definition 41 (Menge der komplexe Zahlen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Zahl $z = a + bi$ heißt* komplexe Zahl*. Wir nennen a den* Realteil *und b den* Imaginärteil*. Die Menge*

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen*. Zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $\overline{z} := a - bi$ heißen* konjugiert komplex*.*

Eine reelle Zahl a kann als komplexe Zahl $a + 0i$ dargestellt werden, und eine imaginäre Zahl bi kann als komplexe Zahl $0 + bi$ dargestellt werden.
Wir werden im Verlauf dieses Abschnitts zeigen, dass die Anwendung der Rechenoperationen der 1. bis 3. Stufe auf komplexe Zahlen stets wieder eine komplexe Zahl ergibt. Damit bedarf es keiner Erweiterung des Rechenbereichs.

Satz 42. *Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_2 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ sind genau dann* gleich, *wenn Real- und Imaginärteil gleich sind,*

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Eine komplexe Zahle $z = a + bi$ ist genau dann gleich null, *wenn Real- und Imaginärteil null sind,*

$$z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \wedge b = 0$$

5.2.1 Rechenoperationen der 1. Stufe (Addition und Subtraktion)

Für die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen gelten – wie bei reellen Zahlen – die Eigenschaften der

Kommutativität	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
Assoziativität	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
Distributuvität	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_2 z_3$	

Satz 43 (Addition und Subtraktion komplexer Zahlen (arithmetrische Form))**.** *Komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Real- und Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert,*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

Für die Summe bzw. Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt sich:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (a - bi) &= 2a \qquad \text{reelle Zahl!} \\ (a + bi) - (a - bi) &= 2bi \qquad \text{komplexer Zahl!} \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $(5 + 2i) + (2 + 3i) = 7 + 5i$
2. $(5 + 2i) - (2 + 3i) = 3 - i$

5.2.2 Rechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation und Division)

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ergibt wegen

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \qquad = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

wieder eine komplexe Zahl. Für konjugiert komplexe Zahlen ergibt sich

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \qquad \text{reelle Zahl!}$$

Damit kann $a^2 + b^2$ stets in das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen zerlegt werden.

Die Divison einer komplexer Zahlen durch eine *reelle* oder *imaginäre* Zahl erfolgt, indem Realteil und Imaginärteil einzeln dividiert werden,

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{a_2} i, \qquad \frac{a_1 + b_1 i}{b_2 i} = \frac{a_1}{b_2} - \frac{a_1}{b_2} i$$

Bei der Division durch eine *komplexe* Zahl wird mit dem konjugierten Wert des Divisors erweitert,

$$\frac{z_1}{z_1} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i))} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_2) i}{a^2 + b^2}$$

Satz 44 (Multiplikation und Division komplexer Zahlen (arithmetrische Form)). *Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ gilt*

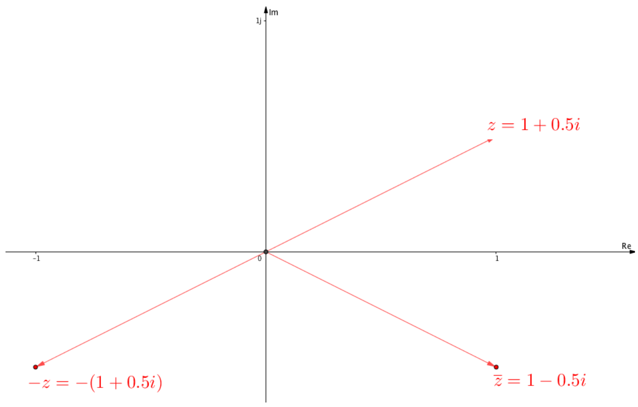
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_2)i}{a^2 + b^2}$$

Beispiele:

1. $(4 + 5i) \cdot (3 - 2i) = 12 - 8i + 15i - 10i^2 = 22 + 7i$.
2. $(4 + 5i) \cdot (5 + 4i) = 20 + 16i + 25i + 20i^2 = 41i$.
3. $\frac{4+3i}{3+4i} = \frac{(4+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-16i+9i-12i^2}{3^2+4^2} = \frac{24-7i}{25} = 0,96 - 0,28i$
4. $\frac{4-3i}{3+4i} = \frac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-16i-9i+12i^2}{3^2+4^2} = -\frac{25i}{25} = -i$

5.3 Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

Zur Darstellung der komplexen Zahlen wird eine Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem verwendet, dessen waagerechte Achse die *reelle Achse* und dessen senkrechte Achse die *imaginäre Achse* ist. Diese Ebene nennen wir dann *Gaußsche Zahlenebene*. Damit lässt sich jede komplexe Zahl z als *Vektor* darstellen, der vom Nullpunkt zum Punkt (a, b) führt. Die Vektoren zweier konjugiert komplexer Zahlen liegen damit *symmetrisch zur rellen Achse*. Die Vektoren von z und $-z$ liegen *symmetrische zum Nullpunkt*, sie sind *entgegengesetzte Vektoren*.



Der Abstand des Zahlenpaars $(a; b)$ vom Ursprung heißt der *absolute Betrag* r der komplexen Zahl $z = a + bi$.

Definition 45 (Betrag). *Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ist*

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

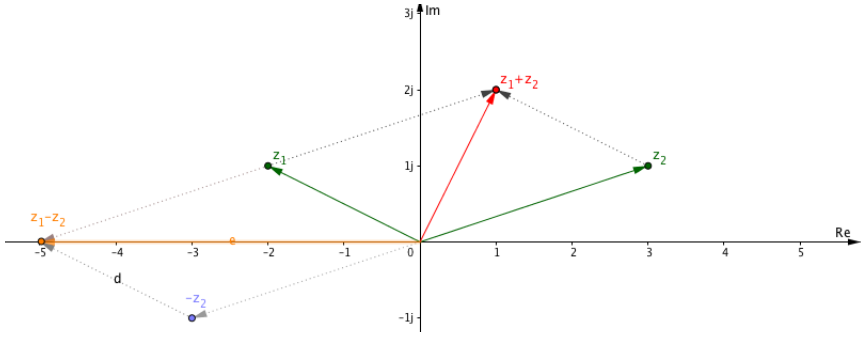
Zwei konjugiert komplexe Zahlen haben stets den selben Betrag, $|z| = |\overline{z}|$.

5.3.1 Rechenoperationen der 1. Stufe (Addition, Multiplikation) in der Gaußschen Zahlenebene

Die Addition und die Subtraktion lassen sich wie folgt in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen.

Addition $z_1 + z_2$: Der eine Vektor wird parallel so verschoben, dass sein Anfang mit der Spitze des anderen Vektors zusammenfällt. Die Summe wird durch den *Summenvektor* dargestellt, der vom Nullpunkt bis zur Spitze des verschobenen Vektors führt.

Subtraktion $z_1 - z_2$: Zum Vektor des Minuenden wird der zum Subtrahenden entgegengesetzte Vektor addiert.



5.4 Trigonometrische Form der komplexen Zahlen

Wir können jeder komplexer Zahl $z = a + bi$ eindeutig ein Vektor in der Gausschen Zahlenebene zugeordnet. Dabei wird ein Vektor durch seine *Länge* und seine *Richtung* bestimmt.

Länge: Die Länge des Vektors ist sein *Betrag* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, der auch als *Modul* von z bezeichnet wird.

Richtung: Die Richtung ergibt sich aus dem Winkel φ zwischen der reellen Achse und dem Vektor. φ ist das *Argument* (oder *Phase*) der komplexen Zahl z. Es gilt $\tan(\varphi) = b/a$, $\sin(\varphi) = b/r$ und $\cos(\varphi) = a/r$.

Ein komplexe Zahl ist damit auch bestimmt durch

Betrag	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ mit $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$ oder $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$

Da die Tangensfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$ i.A. zweideutig ist, ergbit sich φ eindeutig nur durch die Angabe des Sinus bzw. des Cosinus. Allgemein gilt

1. Die Werte im 1. und 2. Quadranten berechnen sich mit $\varphi = \arccos(a/r)$.
2. Die Werte im 3. und 4. Quadranten berechnen sich mit $\varphi = 2\pi - \arccos(a/r)$.

Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z ergeben sich aus dem Betrag r und dem Argument φ:

Realteil	$a = r\cos(\varphi)$
Imaginärteil	$b = r\sin(\varphi)$
$\Longrightarrow$	$z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen in ihrer goniometrischen Form ist die Periodizität der Winkelfunktion zu beachten:

$$\boxed{z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Beispiele:

1. $z = 3 + 4i \Rightarrow r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \tan(\varphi) = \frac{4}{3}, \varphi = 0,9273$
2.

5.4.1 Rechenoperationen der 1. und 2. Stufe (Multiplikation und Division)

Für die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen kann man gut die arithmetrische Form verwenden (siehe Abschnitt 5.2.1). Für Rechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation, Division) und 3. Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) ist die trigonometrische Form bzw. Exponentialform vorteilhaft.

Multiplikation. Aus $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ folgt unter Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2) + i^2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned}$$

Damit entsteht das Produkt zweier komplexen Zahlen aus

1. der Streckung von r_1 um das $r_2$fache (falls $r_2 < 1$ Stauchung) und
2. Drehung von φ_1 um φ_2 im positiven Sinne.

Vergleiche dazu Abbildung 15.

Satz 46 (Multiplikation komplexer Zahlen)**.** *Zwei komplexe Zahlen in der trigonometrischen Form werden multipliziert, indem man ihre* Beträge multipliziert *und ihre* Argumente addiert*,*

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).}$$

Multipliziert man n Faktoren, so erhält man

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1r_2 \cdots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n))}$$

Der Beweis der obigen Formel erfolgt durch *Vollständige Indkuktion:*

- *Induktionsbehauptung:* $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1r_2 \cdots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n))$
- *Induktionsanfang:* Es gilt $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- *Induktionsschritt:* Nach Induktionsanfang gilt

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdots z_n z_{n+1} &= r'(\cos(\varphi') + i\sin(\varphi')) \cdot r_{k+1}(\cos(\varphi_{n+1}) + i\sin(\varphi_{n+1})) \\
&= r'\ r_{k+1}(\cos(\varphi' + \varphi_{n+1}) + i\sin(\varphi' + \varphi_{n+1}))
\end{aligned}$$

mit $r' = r_1 \cdots r_k$ und $\varphi' = \varphi_1 + \cdots + \varphi_k$. Damit folgt die Behauptung.

Division. Unter Anwendung des trigonometrischen Pythagoras und der Additionstheoreme ergibt sich mit $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))}{r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))}$$

Nach Erweitern mit $\overline{(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)}$ ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)))}{\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)}$$

Mit $\sin^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_2) = 1$ und unter Anwendung der Additionstheoreme ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Damit entsteht der Quotient zweier komplexen Zahlen aus

Abbildung 15: Multiplikation und Division

1. der Stauchung von r_1 auf den r_2-ten Teil (falls $r_2 < 1$ Streckung) und
2. Drehung von φ_1 um φ_2 im negativen Sinne.

Vergleiche auch dazu Abbildung 15.

Satz 47 (Division komplexer Zahlen)**.** *Zwei komplexe Zahlen in der trigonometrischen Form werden dividiert, indem man ihre* Beträge dividiert *und ihre* Argumente subtrahiert*,*

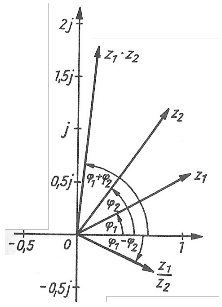
$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

Beispiele:

1. $(3 + 4i) \cdot (4 + 2i) = \ldots = 4 + 22i$
2. $\frac{(3+4i)}{(4+2i)} = \ldots = 1 + \frac{1}{2}i$

5.4.2 Rechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation, Division) in der Gaußschen Zahlenebene

Die Multiplikation und die Division lassen sich wie folgt in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen.



5.4.3 Rechenoperationen der 3. Stufe (Potenzieren, Radizieren)

Potenzieren. Wählt man in Satz 46 für die Beträge $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$ und die Argumente $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$, so erhält man den Satz von Moivre.

Satz 48 (Satz von Moivre)**.** *Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).}$$

Für $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$ und $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ folgt damit

$$\boxed{x^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).}$$

Der für positive ganze Exponenten hergeleitete Satz gilt für beliebige reelle Exponenten!

Radizieren. Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen kann man in Satz 48 auch schreiben

$$\begin{aligned}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n &= (\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi))^n \\ &= (\cos(n\varphi + nk\cdot 2\pi) + i\sin(n\varphi + nk\cdot 2\pi))\,.\end{aligned}$$

D.h. beim Potenzieren einer komplexen Zahl mit einer ganzen Zahl ist das Ergebnis eindeutig. Ist hingegen n ein Wurzelexponent, so ist das Ergebnis nicht eindeutig, wegen

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a+bi} &= \sqrt[n]{r(\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)} \\ &= r^{1/n}(\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Satz 49 (n-te Wurzel einer komplexen Zahl)**.** *Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, $z \neq 0$, gilt*

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}}$$

Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ergeben sich n verschiedene Wurzelwerte. Der Wurzelwert für $k = 0$ heißt der Hauptwert *von $\sqrt[n]{z}$.*

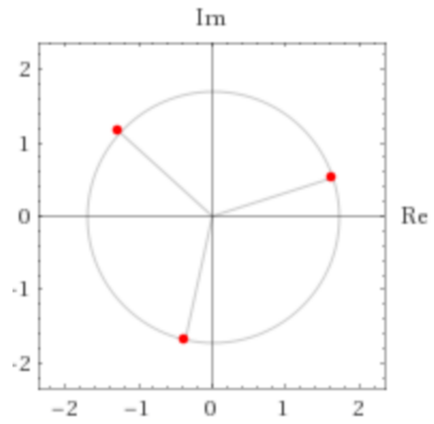
Da alle Wurzelwerte den selben Betrag $r^{1/n}$ haben, liegen die Wurzelwerte alle auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r^{1/n}$. Die Argumente der Wurzelwerte unterscheiden sich jeweils um $2\pi/n$. Damit teilen die Wurzelwerte den Kreis mit dem Radius $r^{1/n}$ in n gleichgroße Abschnitte.
Beispiele:

1. $\sqrt[3]{3+4i}$: Die trigonometrische Form lautet $3+4i = 5\left(\cos\left(\arccos(5/3)\right) + i\sin\left(\arccos(5/3)\right)\right)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3+4i} &= \sqrt[3]{5\cos\left(\arccos(3/5)\right) + i\sin\left(\arccos(3/5)\right)} \\ &= 5^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2\end{aligned}$$

   Damit lauten die drei Wurzeln

$$\begin{aligned}x_1 &= 5^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\arccos(3/5)}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arccos(3/5)}{3}\right)\right) = 1,6 + 0,5i \\ x_2 &= 5^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1,3 + 1,2i \\ x_3 &= 5^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arccos(3/5)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = -0,4 + 1,7i\end{aligned}$$



5.5 Exponentialform der komplexen Zahlen

In der trigonometrischen Form werden beim Multiplizieren komplexer Zahlen die Argumente *addiert*, beim Dividieren *subtrahiert*, beim Potenzieren *multipliziert* und beim Radizieren *dividiert*. Die Argumente haben demnach einen logarithmischen Charakter. Diese Eigenschaft spielt sich in der *Euler'sche Formel* wieder

$$\boxed{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = e^{i\varphi}.}$$

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen gilt ferner

$$\boxed{e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Satz 50 (Exponentialform)**.** *Jede komplexe Zahl z läßt sich in der* Exponentialform

$$z = re^{i\varphi}$$

darstellen. Dabei ist r der Betrag *von z und $e^{i\varphi}$ der sogenannte* Winkelfaktor.

Für die imaginäre Einheit i ergibt sich in der Exponentialform (als komplexe Zahl mit $r = 1$ und $\varpi = \pi/2$

$$i = e^{i\pi/2}, \quad i^2 = -1 = e^{i\pi}, \quad i^3 = -i = e^{i3/2\pi}, \quad i^4 = 1 = e^{i2\pi} = e^0$$

Beispiele:

1. Für $z = 1 + i$ gilt $r = \sqrt{2}, \varphi_1 = \pi/4$. Damit folgt $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
2. Für $z = 1 - i$ gilt $r = \sqrt{2}, \varphi_1 = 7/4\pi$. Damit folgt $z = 1 - i = \sqrt{2}e^{i/4\pi}$.

5.5.1 Rechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation, Division) und 3. Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren)

Für $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ gilt

Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ für $z \neq 0$

Potenzieren $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n(e^{in\varphi})$ für $n \in \mathbb{N}$

Radizieren $\sqrt[n]{(z)} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = r^{1/n}e^{i(\varphi/n+k2\pi/n)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Logarithmieren $\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$.

Beispiele: Seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$

1. $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{1/4\pi i}\sqrt{2}e^{7/4)\pi i} = \sqrt{2}^2 e^{(1/4\pi + 7/4\pi)i} = 2e^{i2\pi}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(1/4-7/4)\pi} = 2e^{i-3/2\pi}$
3. $\ln(z_1) = \ln(\sqrt{2}e^{1/4\pi i}) = \ln(\sqrt{2}) + ie^{1/4\pi}$

5.6 Ganzrationale Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

In Abschnitt 2.2.1 haben wir ganzrationale Gleichungen über dem Grundbereich der reellen Zahlen studiert. Wir wollen nun auch komplexe Koeffizienten zulassen und erhalten die allgemeine Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

Einen Sonderfall dieser ganzrationalen Gleichungen bilden *Binomischen Gleichungen.*

5.6.1 Binomische Gleichungen

Eine *binomische Gleichung* ist gegeben durch

$$x^n = c, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ und } c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Da sich die Lösungsmenge durch Radizieren beider Seiten der Gleichung mit n ergibt, gilt nach Abschnitt 5.4.3

Satz 51. *Eine binomische Gleichung n-ten Grades hat genau n verschiedene Lösungen.*

Die Lösungen der Gleichung $x^n = c$ unterscheiden sich gegenüber dem Fall $c = 1$ nur um den Faktor $\sqrt[n]{r}$. Daher untersuchen wir hier nur den Fall $x^n = 1$: Die n Lösungen sind gegeben durch

$$x = \sqrt[n]{1} = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Die n verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ heißen die *n-ten Einheitswurzeln.* Sie können wegen $r = 1$ als Punkte auf dem Einheitskreis dargestellt werden, die diesen vom Punkt $+1$ der reellen Achse aus in n gleiche Teile teilen. Die Argumente unterscheiden sich jeweils um $2\pi/n$. Abbildung 16 zeigt die 12 zu $\sqrt[12]{1}$ gehörenden Einheitswurzeln.

5.6.2 Ganzrationale Gleichungen

Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra haben algebraische Gleichungen n-ten Grades n reelle oder komplexe Lösungen. Jede algebraische Gleichung ist dann als Produkt von Linearfaktoren darstellbar. Sind die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung n-ten Grades reell, ist mit z auch $\overline{z}$ eine Lösung.
Beispiele:

1. x^4–$2x^3 + 4x - 4 = 0$: Die Lösung $x_1 = 1 + i$ sei bekannt. Da alle Koeffizienten reell sind, ist mit x_1 auch $\overline{x_1} = 1 - i$ ein Lösung.

   Wir überführen zunächst x^4–$2x^3 + 4x - 4 = 0$ in die reduzierte Form. Mit $(1+i)(1-i) = x^2 - 2x + 2$ gilt

   $$\begin{array}{l}
   \big(\;\; x^4 - 2x^3 \qquad\quad + 4x - 4\big) : \big(x^2 - 2x + 2\big) = x^2 - 2 \\
   \underline{\;-x^4 + 2x^3 - 2x^2\;} \\
   \qquad\qquad\quad -2x^2 + 4x - 4 \\
   \qquad\qquad\quad \underline{\;\;\; 2x^2 - 4x + 4} \\
   \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
   \end{array}$$

   Damit sind die beiden fehlenden Nullstellen $x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$.

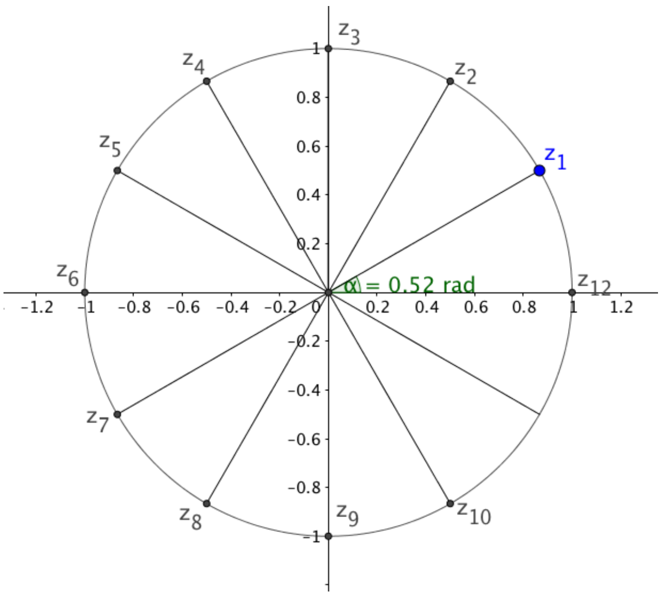


Abbildung 16: 12te Einheitswurzel. Die Argumente unterscheiden sich jeweils um $2/12\pi = 0,52$. Sie teilen den Einheitskreis in 12 gleichgroße Teile.

6 Lineare Algebra

6.1 Lineare Gleichungssysteme

Zusammenhänge in der Technik lassen sich oft durch Proportionalitäten und Beziehungen beschreiben, in denen alle abhängigen und unabhängigen Größen höchstens in der ersten Potenz auftreten. Man bezeichnet einen Zusammenhang

$$y = a_1 x_1 + a_2 2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

als *lineare Funktion* oder *Funktion ersten Grades*. Wird auch y fest vorgegeben, etwa $y = b$, nennen wir

$$a_1 x_1 + a_2 2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

eine *lineare Gleichung*. Im Unterschied zu einer linearen Funktion ist diese nicht mehr für beliebige Belegungen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gültig, sondern nur noch für ganz bestimmen Zahlen, die zu ermitteln sind.
Treten mehrere abhängige Variablen, etwa $y_1, y_2, \ldots, y_n$, in insgesamt m Gleichungen auf, so bezeichnet man

$$\begin{array}{ccccccccc}
y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\
y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n
\end{array}$$

als *lineares Funktionensystem*. Bei festgelegten Zahlenwerte für $y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet man

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}}$$

als *lineares Gleichungssystem*. Bei den Koeffizienten a_{ik} beider Systems gibt der erste Index i die Zeilen und der zweite Index k die Spalte an. Die fest vorgegebenen Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ nennt man *Absolutglieder* oder *rechte Spalte*.
Gilt für alle Absolutglieder $b_1 = b_2 = \ldots = 0$ so nennt man das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*.
Wesentlicher Gegenstand der Linearen Algebra ist die Lösung linearer Gleichungssysteme zu bestimmen.
Wie die drei folgenden Beispiel zeigen, können drei unterschiedliche Fälle eintreten:
Beispiele:

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\
1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
1x_1 & - & 1x_2 & + & 4x_3 & = & -5
\end{array}$$

   Es besitzt die **eindeutige Lösung** $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = -2$. Durch Einsetzen kann man sich von der Richtigkeit der Lösung überzeugen.

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\
1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
-1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1
\end{array}$$

   Es besitzt **keine Lösung**, da die dritte Gleichung im Widerspruch zur Differenz der ersten Gleichungen steht.

3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

   Es besitzt neben der Lösung $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = -1$ **unendliche viele** weitere **Lösungen**. Setzt man $x_3 = t$, wobei t ein beliebiger frei wählbarer Parameter ist, so erhält man mit $x_1 = 6 + t, x_2 = -1 - t$ unendlich viele weitere Lösungen.

Wir werden in Abschnitt 6.7 studieren, wie man die Lösung eines linearen Gleichungssystem bestimmen kann. Bevor wir dies tun, benötigen wir das zentrale Werkzeug der Matrizen:

6.2 Matrizen

Definition 52 (Matrizen und Vektoren)**.**
Unter einer Matrix *vom* Typ (m, n) *versteht man ein geordnetes Schema von $m \cdot n$ Zahlen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind. Man schreibt* $A = A_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Damit steht der* Eintrag a_{ik} *in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte.*
Eine Matrix vom Typ $(1, n)$ heißt auch Zeilenvektor. *Eine Matrix vom Typ $(m, 1)$ heißt auch* Spaltenvektor.

Definition 53 (Lineare (Un)abhängigkeit)**.** *Die Vektoren $v_1, v_2, \dots v_n$ heißen* linear abhängig, *falls es eine nicht-triviale Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n = 0$ gibt. Andernfalls heißen die Vektoren* linear unabhängig.

Bevor wir den Umgang mit Vektoren und Matrizen besprechen, führen wir noch einige später nützliche Definitionen zur Gestalt und Struktur von Matrizen ein.

Definition 54 (Gestalt und Struktur von Matrizen)**.**

1. *Eine Matrix $A_{(n,n)}$, bei der die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich ist, heißt* quadratische Matrix.
2. *Eine Matrix A^T, die aus einer Matrix A durch Vertauschen der Einträge a_{ik} und a_{ki} hervorgeht, $(a_{ik})^T = a_{ki}$, heißt* transponierte Matrix.
3. *Eine Matrix $A_{(m,n)}$ heißt* Nullmatrix, *falls alle Einträge a_{ik} gleich Null. Sie wird mit* 0 *bezeichnet.*
4. *Eine quadratische Matrix $A_{(n,n)}$ heißt* symmetrisch, *falls $A = A^T$ gilt.*
5. *Eine quadratische Matrix $A_{(n,n)}$ heißt* schiefsymmetrisch, *falls $A = -A^T$ gilt.*
6. *Eine quadratische Matrix $A_{(n,n)}$ heißt*
   (a) obere Dreieckecksmatrix, *falls $a_{i,k} = 0$ für alle $i > k$ gilt.*
   (b) untere Dreieckecksmatrix, *falls $a_{i,k} = 0$ für alle $i < k$ gilt.*
   (c) Diagonalmatrix, *falls $a_{i,k} = 0$ für alle $i \neq k$ gilt.*
   (d) *Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonaleinträge gleich 1 sind, heißt* Einheitsmatrix *und wird mit E_n bezeichnet.*

Beispiele:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix vom Typ $(2,4)$. Es gilt $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix vom Typ $(4,4)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine obere Dreiecksmatrix

5. $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Einheitsmatrix vom Typ $(4,4)$.

6.2.1 Rechenoperationen für Matrizen

Definition 55 (Addition und Subtraktion von Matrizen). *Seien $A_{(m,n)}$ und $B_{(m,n)}$ zwei Matrizen gleichen Typs. Dann gilt für die* Summe $A+B$ *und die* Differenz $A-B$

$$(A+B)_{ik} := (a_{ik} + b_{ik}) \quad \textit{für alle } i,k (A-B)_{ik} \qquad := (a_{ik} - b_{ik}) \quad \textit{für alle } i,k$$

Definition 56 (Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl). *Man multipliziert eine Matrix mit einer Zahl λ, indem man jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert:*

$$\lambda A := (\lambda a_{ik})$$

Definition 57 (Matrixprodukt).

1. *Zwei Matrizen $A_{(m,n_1)}$ und $B_{n_2,p}$ heißen* verkettbar, *falls $n_1 = n_2$ gilt.*
2. *Seien $A_{(m,n)}$ und $B_{n,p}$ zwei verkettbare Matrizen. Dann gilt für das* Matrixprodukt $C = A \cdot B$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

Definition 58 (Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor). *Unter einer* linearen Abbildung *$y = Ax$ versteht man die lineare Transformation eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ in einen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ durch die Multiplikation mit einer Matrix $A_{(m,n)}$.*

Beispiele:

1. Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$ und $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$. Ferner gilt $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 43 \\ 142 & 88 \end{pmatrix}$

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Dann gelten $A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. Obwohl die Matrizen in beide Richtungen verkettbarkeit sind, ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.

6.3 Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme

Sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Wir schreiben die Koeffizienten des linearen Gleichungssystem in die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{die unbekannten Variablen in } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und die rechte Seite in } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich das lineare Gleichungssystem schreiben als

$$A \cdot x^T = y^T \text{ oder } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

1. $$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

6.4 Determinanten

Wir werden in Abschnitt 6.7 sehen, dass die sogenannte Determinante einer Matrix entscheidende Informationen für die Lösung eines lineares Gleichungssystem $Ax = y$ liefert. Zur Motivation betrachten wir ein lineares Gleichungssystem mit zwei Zeilen und zwei Unbekannten:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_1$$

Geschickte Umformungen führen uns zu den Lösungen

$$x_1 = \frac{a_{22}y_1 - a_{12}y_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$
$$x_2 = \frac{a_{11}y_2 - a_{21}y_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

wobei beide Brüche den gleichen Nenner $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ enthalten. Für ein lineares Gleichungssystem mit 3 Zeilen und 3 Unbekannten haben die Lösungen auch den selben Nenner, nämlich

$$D_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

In Abschnitt 6.7 werden wir sehen, dass man die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems als Matrix auffassen kann.

Definition 59 (Determinante 1. und 2. Ordnung)**.** *1. Sei A eine Matrix vom Typ $(2,2)$. Dann heißt $D_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$* Determinante 2. Ordnung*.*

2. Sei A eine Matrix vom Typ $(3,3)$. Dann heißt $D_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$ Determinante 3. Ordnung*.*

Beispiele:

1. $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3(-1) = 10 + 3 = 13$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2(5-48) - 3(20-8) - 1(24-1) = -145$

In Beispiel 3 haben wir die Determinante 3. Ordnung bestimmt, indem wir drei Determinanten 2. Ordnung bestimmt haben. Diese Determinanten zweiter Ordnung nennt man auch die *Unterdeterminanten*,

$$|U_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, |U_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, |U_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

zu den jeweiligen Untermatrizen U_{ik}, die sich durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte aus der Ausgangsmatrix ergeben. Damit können wir allgemein die Determinante von beliebig großen quadratischen Matrizen definieren.

Definition 60 (Determinante n-ter Ordnung, Adjungierte Matrix)**.** *Seien $A_{(n,n)}$ und U_{ik} die jeweiligen $(n-1),(n-1)$-Untermatrizen, die sich durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte aus A ergeben.*

1. *$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|U_{ik}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|U_{ik}|$ heißt* Determinante n-ter Ordnung *von A. In der ersten Summe wird die Determinante* nach der i-ten Zeile entwickelt*. In der zweiten Summe* nach der k-ten Spalte*.*

2. $A_{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ *mit $A_{ik} = (-1)^{i+k}|U_{ik}|$ heißt* adjungierte Matrix *zu A.*

Damit ist die Determinante einer Matrix A insbesondere dann gleich null, wenn eine Zeile (oder Spalte) nur aus Nullen besteht.

Beispiele:

1. Wir entwickeln die Determinante nach der zweiten Spalte, so dass wir nur zwei Determinanten berechnen müssen (zwei Einträge sind gleich null!):
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)23 - 3 * (-21) = 40$$

6.4.1 Eigenschaften von Determinanten

Satz 61 (Eigenschaften von Determinanten)**.** *Sei $A_{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Dann gelten:*

1. $|A^T| = |A|$
2. A^* *gehe aus A durch das Vertauschen zweier benachbarter Zeilen (oder Spalten) hervor. Dann gilt* $|A| = -|A^*|$.
3. $\lambda|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *und* $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

Beispiele:

1. Es gelten $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ und $|A^T| = \begin{vmatrix} a & c \\ d & d \end{vmatrix} = ab - ac = |A|$.
2. ... und $|A^*| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -|A|$.
3. ... und $\lambda|A| = \lambda(ad - bc) = (\lambda ad - \lambda bc) = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Definition 62 (Elementare Umformungen)**.** *Sei A eine Matrix vom Typ (m, n). Umformungen der Gestalt, dass zu einer Zeile (oder Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert wird, nennen wir* elementare Umformungen.

Satz 63. *Sei $A_{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Die Determinante $|A|$ bleibt unter elementaren Umformungen unverändert.*

Der obige Satz ist der hilfreich, um die Determinante einer großen Matrix zu berechnen. Wie das folgende Beispiel zeigt, können wir die Matrix so umformen, dass möglichst viele Elemente einer Zeile oder Spalte gleich Null sind.
Beispiele:

1. $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{s_1+2s_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{s_3-3s_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 8 & -5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -377.$$
2. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{2z_2-z_1, 2z_3-z_1}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{z_3+z_2}{=} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}0 = 0.$$

Aus Satz 63 und den obigen Beispielen folgt:

Satz 64. *Sei $A_{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $|A| = 0$
2. *Eine Zeile (oder Spalte) existiert nur aus Nullen.*
3. *Durch die Addition einer Zeile (oder Spalte) mit dem Vielfachen einer anderen Zeile (oder Spalte) lässt sich eine Zeile oder Spalte so umformen, dass sie nur noch aus Nullen besteht.*

Beim Berechnen der Determinante können beliebig viele Umformungen der Art vornehmen, wie wir es in den zwei obigen Beispielen gezeigt haben. Insbesondere können wir jede Matrix so in eine **obere Dreiecksmatrix** transformieren. Vorteil dabei ist, dass wir die Determinante von Dreicksmatrizen ohne großen Aufwand berechnen können. Es gilt nämlich:

Satz 65. *Sei $A_{n,n}$ eine Dreiecksmatrix. Dann gilt $|A| = a_{11} \cdots a_{nn}$.*

Beispiele:

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot f.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{2z_2 - z_1, 2z_3 - z_1}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} \overset{5z_3 + 3z_2}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (60) = \frac{1}{20} 600 = 30.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Umformungen}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-25) = -500$

6.5 Matrixrang

Ein weiterer zentraler Begriff im Zusammenhang von Matrizen und linearen Gleichungssystemen ist der Rang einer Matrix.

Definition 66 (Matrixrang). *Sei A eine Matrix vom Typ (n, m). Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten) heißt* Matrixrang. *Wir sagen der Rang ist* maximal, *wenn $r(A) = \min(n, m)$.*

Den Rang einer Matrix A kann man am besten berechnen, indem man A in die Zeilenstufenform bringt:

Definition 67 (Zeilenstufenform). *Eine Matrix A hat* Zeilenstufenform, *falls*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & |1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 68 (Elementare Umformungen). *Jede Matrix lässt sich durch die Addition einer Zeile mit dem Vielfachen einer anderen Zeile auf die Zeilenstufenform bringen.*

Satz 69 (Matrixrang). *Der Rang einer Matrix wird bestimmt durch die Anzahl der Zeilen, die nach dem Umformen einer Matrix in Zeilenstufenform ungleich null sind. Wir schreiben $r(A)$.*

Beispiele:

1. $r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{2z_2-z_1, 2z_3-z_1}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \overset{z_3+z_2}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Da $2 < \min(3,3)$ ist der Rang nicht maximal.
2. $r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{2z_2-z_1, 2z_3-z_1}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{5z_3+3z_2}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} = 3$. Da $3 = \min(3,3)$ ist der Rang maximal.
3. $r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \overset{2z_2-z_1, 2z_3-z_1}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 9 & -21 \end{pmatrix} \overset{5z_3+3z_2}{=} r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 60 & -120 \end{pmatrix} = 3$. Da $3 = \min(3,4)$ ist der Rang maximal.

6.6 Matrizeninversion

Ähnlich wie Determinanten, spielt die sogenannte inverse Matrix bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen eine tragende Rolle. Als Motivation betrachten wir zunächst die reelle Gleichung $cx = b$. Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man $x = c^{-1}b = bc^{-1}$.
Sei nun $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem bzw. eine lineare Abbildung. Wir wollen die Gleichung nun ebenfalls nach x auflösen. Setzt man naiv $x = A^{-1}y$ in $y = Ax$ ein, so erhält man

$$y = A(A^{-1}y) = AA^{-1}y.$$

Ebenso ergibt sich durch Einsetzen von $y = Ax$ in $x = A^{-1}y$ die Beziehung

$$x = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x.$$

In beiden Fallen muss gelten $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Damit die Verkettbarkeit in beide Richtungen gewährleistet ist, muss A quadratisch sein.

Definition 70 (Inverse Matrix). *Die quadratische Matrix A^{-1}, die zusammen mit einer gegebenen quadratischen Matrix A die Bedingung*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

erfüllt, heißt inverse Matrix *zu A.*
Eine quadratische Matrix, zu der die Inverse Matrix A^{-1} existiert, heißt reguläre *Matrix. Existiert die Inverse nicht, heißt die Matrix* singulär.

Beispiele:

1. Nicht jede quadratische Matrix besitzt eine Inverse: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ zu A invers, genau dann wenn

$$AB = E \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = 1, v = 1 \\ u = 0, v = 1 \end{cases}$$

Da das ein Widerspruch ist, kann A^{-1} nicht existieren.

2. Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ die Inverse. Um die Einträge von B zu bestimmen müssen wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 1u + 2w \qquad\qquad &= 1 \\ 2u + 1w \qquad\qquad &= 0 \\ 1v + 2x &= 1 \\ 2v + 1x &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung ergibt sich durch eine kurze Rechnung: $u = -1/3, v = 2/3, w = 2/3, x = -1/3$. Damit gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Für die Bestimmung einer inversen Matrix vom Typ $(3,3)$ und größer benötigen wir den folgenden Satz.

Satz 71. *Sei $A_{(n,n)}$ eine quadratische Matrix mit $|A| \neq 0$. Dann existiert die inverse Matrix. A^{-1} lässt sich bestimmen nach der Formel*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{adj}$$

Beispiele:

1. Wir betrachten wieder die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Die zu A adjungierte Matrix ist $A_{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für die Inverse $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Es gibt einen bestimmten Typ regulärer Matrizen, für die die Bestimmung der Inversen sehr einfach ist:

Definition 72 (Orthogonale Matrizen)**.** *Eine quadratische Matrix A mit*

$$A \cdot A^T = E$$

heißt orthogonale Matrix. *Für orthogonale Matrizen fällt die Inverse also mit der transformierten Matrix zusammen, $A^{-1} = A^T$.*

Beispiele:

1. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Für $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\alpha^T &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 73 (Eigenschaften der Inversen Matrix). *Sei $A_{(n,n)}$ eine reguläre Matrix. Dann gelten*

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
3. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

6.6.1 Matrizengleichungen

Die Auflösung der Gleichung $y = Ax$ nach x lautet $x = A^{-1}y$. Der entscheidende Lösungsgedanke ist die *Multiplikation mit einer inversen Matrix A^{-1} von links.* Diese Idee lässt sich auf sogenannte *Matrizengleichungen* übertragen, bei der die Unbekannte eine Matrix ist.
Beispiele:

1. Wir bestimmen X aus $AX + \lambda X = B, \lambda \in \mathbb{R}$ (X ist Rechtsfaktor):

$$\begin{aligned}(A+\lambda E)X &= B \quad \text{(es gilt } X = EX)\\ (A+\lambda E)^{-1}((A+\lambda E))X &= (A+\lambda E)^{-1}B\\ X &= (A+\lambda E)^{-1}B\end{aligned}$$

2. Wir bestimmen X aus $XA + \lambda X = B, \lambda \in \mathbb{R}$ (X ist Linksfaktor):

$$\begin{aligned}X(A+\lambda E) &= B \quad \text{(es gilt } X = XE)\\ X(A+\lambda E)((A+\lambda E))^{-1}X &= B(A+\lambda E)^{-1}\\ X &= B(A+\lambda E)^{-1}\end{aligned}$$

6.7 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Wir kommen nur zurück zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme. Wir verwenden die Matrixschreibweise

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Für den Fall, dass die inverse Matrix A existiert, können wir die Lösung x mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 6.6 leicht angeben. Es gilt:

Satz 74 (Lösbarkeit reguläres LGS). *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix A. Dann gilt $x = A^{-1}b$.*

Beispiele:

1. Sei $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ zu lösen. Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu lösen. Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Im Fall, dass die Koeffizientenmatrix nicht invertierbar ist, wird es etwas schwieriger.

Definition 75 (Erweiterte Koeffizientenmatrix)**.** *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Wir definieren die* erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Für die Bestimmung des Rangs einer Matrix führen wir solange elementare Umformungen durch, bis wir eine Zeilenstufenform erreicht haben. Aus der Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix können wir rückwärts rechnend die Unbekannten bestimmen. Noch einfacher ist es allerdings, durch elementare Umformungen soweit zu gehen, dass wir eine Einheitsmatrix bekommen:

Satz 76 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme I)**.** *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit Matrix A vom Typ (n, n). Die Lösungsmenge lässt sich folgendermaßen bestimmen:*

1. *Wir formen $(A|b)$ mit Hilfe elementarer Umformungen so um, dass auf der linken Seite eine Einheitsmatrix vom Typ (r, r) steht, wobei $r = r(A)$,*

$$\left(A_{(n,n)}|b\right) \overset{\text{elementare Umformungen}}{\longrightarrow} \left(E_{(r,r)}|x\right)$$

2. *Falls $r(A) = r(A|b) = n$, ist die Lösung aus der rechten Seite abzulesen.*
3. *Falls $r(A) < r(A|b)$ existiert keine Lösung.*
4. *Falls $r(A) = r(A|b) < n$, dann existieren unendlich viele Lösungen.*

Zusammenfassend formulieren wir noch folgende Äquivalenzen:

Satz 77 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme II)**.** *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit Matrix A vom Typ (n, n). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A ist regulär, d.h. die Inverse A^{-1} existiert.*
2. *Die Determinante ist gleich null, $|A| = 0$.*
3. *Die Lösung des linearen Gleichungssystem ist eindeutig, $x = A^{-1}b$.*
4. *Mit Hilfe elementarer Umformungen ist A in die Einheitsmatrix E überführbar.*

Beispiele: Wir betrachten die drei Beispiele aus Abschnitt 6.1.

1. Wir betrachten
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$
Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$
Elementare Umformungen führen zu:
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
Damit gilt $r(A) = 3 = r(A|b)$. Es existiert **genau eine Lösung**, $x_1 = 4, x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

2. Wir betrachten
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
Elementare Umformungen führen zu:
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Damit gilt $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|b)$. Es existiert **keine Lösung**!

3. Wir betrachten
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 11 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & + & -2x_2 & + & -3x_3 & = & 8 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$
Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$
Elementare Umformungen führen zu:
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Damit gilt $r(A) = 2 = r(A|b)$. Es existiert **unendlich viele Lösungen**, $x = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $1 = n - r(A) = 3 - 2$ frei wählbaren Variablen $t \in \mathbb{R}$.