Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

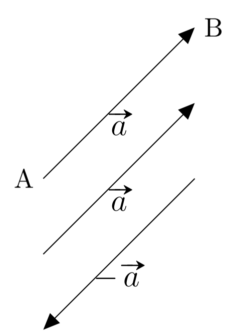
Einführung in die Vektorrechnung

In Naturwissenschaften und Technik sind zwei Klassen von Objekten von großer Bedeutung:

- **Skalare:** ungerichtete Größen; bestimmt durch Angabe einer Maßzahl (evtl. mit einer Maßeinheit)
  Beispiele: die Masse m, die Ladung q eines Körpers

- **Vektoren:** gerichtete Größen; bestimmt durch Angabe einer Maßzahl (evtl. mit einer Maßeinheit), als **Betrag** bezeichnet, einer Richtung und eines Richtungssinns.
  Beispiele: die Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$, die Kraft $\overrightarrow{F}$

1.1 Anschauliche Vorstellung von Vektoren:



Ein Vektor kann als Verschiebung von einem Punkt A zu einem zweiten Punkt B aufgefasst werden.

Bezeichnung des Vektors: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$

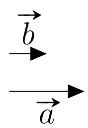
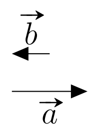
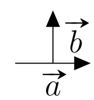
Ein Vektor ist bestimmt durch drei Größen:

- **Betrag** $\|\overrightarrow{a}\|$ des Vektors: Länge des Pfeils
- **Richtung** des Vektors: Richtung der Strecke AB
- Richtungssinn (**Orientierung**) des Vektors:
  Richtung der Pfeilspitze

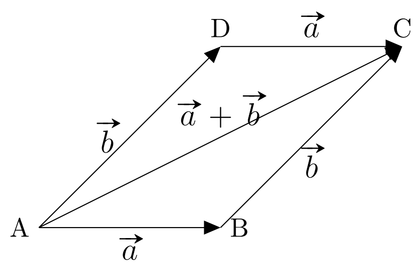
Gleichheit von Vektoren:
Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen
$-\overrightarrow{a}$: Vektor mit gleichem Betrag und gleicher Richtung wie $\overrightarrow{a}$, aber mit entgegengesetzter Orientierung, d.h. $-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$
Bemerkung:

- Da Vektoren durch Betrag, Richtung und Orientierung vollständig bestimmt sind, können wir sie frei im Raum verschieben (**freie Vektoren**).
- Zu einem gegebenen freien Vektor $\overrightarrow{c}$ definieren wir einen **Ortsvektor** $\overrightarrow{OC}$, der den Betrag, die Richtung und die Orientierung von $\overrightarrow{c}$ hat und der im Koordinatenursprung beginnt.
- Falls $\|\overrightarrow{a}\| = 1$ gilt, bezeichnet man $\overrightarrow{a}$ als **Einheitsvektor**.

1.2 Lagebeziehung von Vektoren

parallel (kollinear) $\vec{a} \parallel \vec{b}$		orthogonal (senkrecht) $\vec{a} \perp \vec{b}$
echt parallel $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$	antiparallel $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	
		

1.3 Addition von Vektoren



Ist $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, so können wir jeden zweiten Vektor $\vec{b}$ so **parallel verschieben**, dass er bei B beginnt: $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
Die Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird definiert als die Gesamtverschiebung von A nach C:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$$

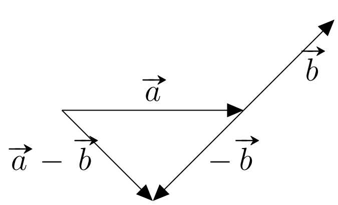
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (s. Skizze)

Assoziativgesetz: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

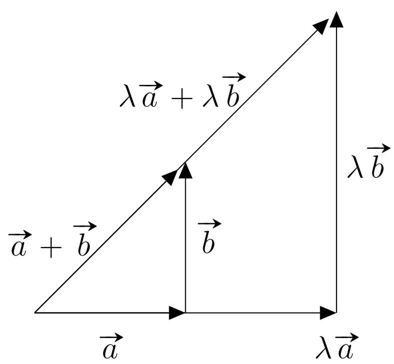
Der **Nullvektor** ist der Vektor mit
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
Dieser Vektor hat die Länge 0.

1.4 Subtraktion von Vektoren



Wir führen die Subtraktion auf die Addition zurück:
$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

1.5 Multiplikation mit einem Skalar



Für jede reelle Zahl λ und jeden Vektor $\vec{a}$ definieren wir die Multiplikation wie folgt:

- $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$
- $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ falls $\lambda > 0$

  $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ falls $\lambda < 0$
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

Geometrisch ergeben sich die Eigenschaften:

Assoziativgesetz: $\lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2)\, \vec{a}$

1. Distributivgesetz: $(\lambda_1 + \lambda_2)\, \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$

2. Distributivgesetz: $\lambda \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (s. Skizze)

Man kann für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ einen **Einheitsvektor** $\vec{a_0}$ definieren, der die gleiche Richtung wie $\vec{a}$, aber den Betrag 1 hat:

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \;;\; \|\vec{a_0}\| = 1$$

1.6 Verallgemeinerung

Der Begriff eines Vektors lässt sich allgemeiner fassen. So lassen sich Objekte in höherdimensionalen Räumen ebenso als Vektoren beschreiben wie z. B. auch Polynome.

Eine Menge V heißt Vektorraum genau dann, wenn $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die folgenden Relationen erfüllt sind:

Addition von Vektoren

$\vec{a} + \vec{b} \in V$	Abgeschlossenheit von V
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$	Assoziativgesetz
$\exists \vec{0} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Neutrales Element
$\forall \vec{a} \in V \; \exists \vec{c} \in V : \quad \vec{a} + \vec{c} = \vec{0}$	Inverses Element

Multiplikation mit einem Skalar

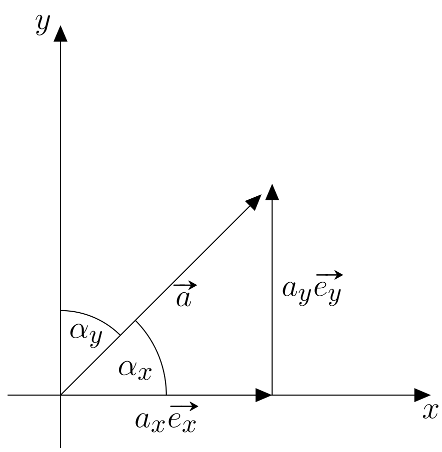
$\lambda_1 \vec{a} \in V$	Abgeschlossenheit von V
$\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$	Kommutativgesetz
$\lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{a}$	Assoziativgesetz
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	Neutrales Element

Distributivgesetze

$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$	1. Distributivgesetz
$\lambda_1 \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_1 \vec{b}$	2. Distributivgesetz

1.7 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Koordinatensysteme

1.7.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$



Wie definieren zwei spezielle **Basisvektoren**:

- $\vec{e_x}$: Einheitsvektor in Richtung positiver x-Achse
- $\vec{e_y}$: Einheitsvektor in Richtung positiver y-Achse

$\vec{a}$ lässt sich als **Linearkombination** von $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ schreiben:

$$\vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y}$$

$\vec{a}$ ist durch die **Koordinaten** a_x , a_y eindeutig bestimmt. Wir können daher schreiben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|\vec{a}\| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \cos(\alpha_i) &= \frac{a_i}{\|\vec{a}\|} \quad \text{für } i \in \{x; y\} \end{aligned}$$

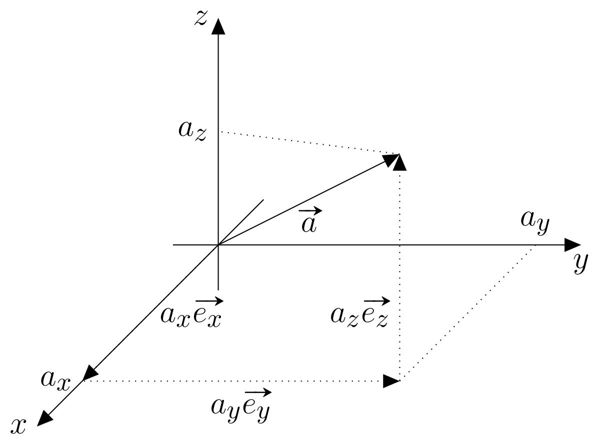
Dabei bezeichnet man $\cos(\alpha_i)$ als **Richtungskosinus** und α_i als **Richtungwinkel**.

Bemerkungen:

- Die Menge $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ bildet eine **Basis** des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ mit der Dimension 2.
- Durch diese Basis wird zugleich ein **Koordinatensystem** definiert.
- Wegen $\|\vec{e_x}\| = \left\|\vec{e_y}\right\| = 1$ und $\vec{e_x} \perp \vec{e_y}$ heißt dieses Koordinatensystem orthonormiert.

1.7.2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ kann ebenso wie die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe spezieller Basisvektoren beschrieben werden:



- $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$: Einheitsvektoren in Richtung der positiven Koordinatenachsen
- $\vec{a} \; = \; a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}$
- $\vec{a} \; = \; \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$
- $\|\vec{a}\| \; = \; \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- $\cos(\alpha_i) \; = \; \dfrac{a_i}{\|\vec{a}\|}$ für $i \; \in \; \{x; y; z\}$

Die Menge $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$ bildet eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$, der daher die Dimension 3 hat.

Wegen $\|e_x\| \; = \; \left\|\vec{e_y}\right\| \; = \; \|\vec{e_z}\| \; = \; 1$ und $\vec{e_x} \perp \vec{e_y} \perp \vec{e_z}$ ist das zu dieser Basis gehörende Koordinatensystem orthonormiert.

1.8 Koordinatendarstellung der Rechenoperationen

Mit Hilfe der Koordinatendarstellung der Rechenoperationen können wir nun algebraische Ausdrücke für die weiter oben geometrisch definierten Rechenoperationen angeben.

Addition/Subtraktion:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} \; &= \; \left(a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}\right) \pm \left(b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_y}\right) \\ &= \; (a_x \pm b_x)\,\vec{e_x} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{e_y} + (a_z \pm b_z)\,\vec{e_z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation:

$$\lambda\vec{a} \; = \; \lambda\left(a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}\right) \; = \; (\lambda a_x)\,\vec{e_x} + \left(\lambda a_y\right)\vec{e_y} + (\lambda a_z)\,\vec{e_z}$$

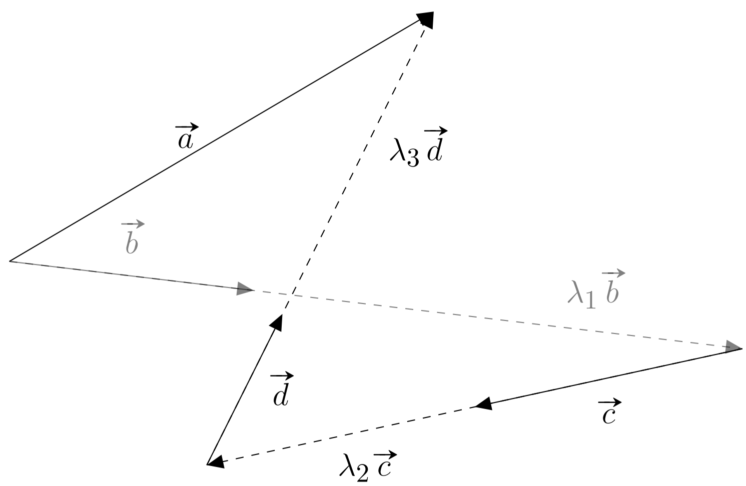
$$\Rightarrow \; \lambda\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

1.9 Linearkombinationen, lineare Unabhängigkeit von Vektoren, Basen

Im $\mathbb{R}^3$ kann jeder Vektor $\vec{a}$ mit Hilfe der Basisvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und $\vec{e_z}$ geschrieben werden als

$$\vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z}.$$

Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften der Menge der Vektoren $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ dies ermöglichen. Unter welchen Voraussetzungen lässt sich ein Vektor $\vec{a}$ mit Hilfe der Menge $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ als $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d}$ schreiben?



Dies führt uns zunächst auf den Begriff der Linearkombination:

Linearkombination
Eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck der Form:

$$\vec{r} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Wenn wir aus einer Menge von Vektoren, in obigem Beispiel $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$, einen der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen können, nennen wir die Menge $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ **linear abhängig**. Andernfalls ist die Menge linear unabhängig.

Etwas allgemeiner definieren wir:

Lineare Unabhängigkeit
Die Vektoren $\vec{a}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ heißen **linear unabhängig** genau dann, wenn gilt:

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Dies ist äquivalent zu der Forderung, dass sich kein Vektor $\vec{a}_i$ als Linearkombination der übrigen Vektoren $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n$ darstellen lässt.

Beispiel: Linearkombination dreier Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

Die Menge $\{\vec{r}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ist also linear abhängig.

Bisher war die Frage, ob man einen speziellen Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination von Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ darstellen kann. Im Fall der Vektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ kann man aber jeden Vektor aus dem dreidimensionalen Raum als Linearkombination dieser Vektoren darstellen. Dies motiviert den Begriff der **Basis** eines Vektorraums.

Basis eines Vektorraums V
Eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ aus einem Vektorraum V, aus der sich jedes $\vec{r} \in V$ durch Linearkombination erzeugen lässt, heißt Basis von V.

Ist nun $\vec{a}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Basis von V, so gibt es für jedes $\vec{r} \in V$ Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\vec{r} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n, \quad \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Jede Basis eines Vektorraums definiert auf diese Weise ein **Koordinatensystem**.

Die Zahl n der Vektoren einer Basis hängt nicht von der Wahl der Basis ab und heißt **Dimension** von V. Dies ist zugleich die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V.

Bemerkungen:

- Eine Menge von zwei Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren **kollinear** sind.
- Eine Menge von drei Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren **komplanar** sind.
- In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind Mengen mit mehr als zwei Vektoren automatisch linear abhängig. Jede Menge von zwei linear unabhängigen Vektoren bildet dann eine Basis.
- Im Raum $\mathbb{R}^3$ sind Mengen mit mehr als drei Vektoren automatisch linear abhängig. Jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren bildet dann eine Basis.

Beispiel: Linearkombination
Der Vektor $\vec{a}$ soll als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ geschrieben werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man löst das lineare Gleichungssystem $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d}$ in der Form:

λ_1	λ_2	λ_3	
2	1	1	2
−1	2	1	−3
1	−2	2	9
1	−2	2	9
2	1	1	2
−1	2	1	−3
1	−2	2	9
0	5	−3	−16
0	0	3	6

λ_1	λ_2	λ_3	
1	−2	0	5
0	5	−3	−16
0	0	1	2
1	−2	0	5
0	5	0	−10
0	0	1	2
1	0	0	1
0	1	0	−2
0	0	1	2

Somit ergibt sich die Lösung $\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c} + 2\vec{d}$.

Beispiel: Lineare Unabhängigkeit
Zu prüfen ist, für welche Werte des Parameters a die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.
Das zu lösende Gleichungssystem $\vec{0} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ kann wie folgt geschrieben werden:

λ_1	λ_2	λ_3	
1	0	a	0
2	a	1	0
2	1	a	0
1	0	2	0
0	a	$1-2a$	0
0	1	$-a$	0
1	0	2	0
0	1	$-a$	0
0	0	$(1-a)^2$	0

$a \neq 1 \Rightarrow Rang A = Rang(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ Genau eine Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

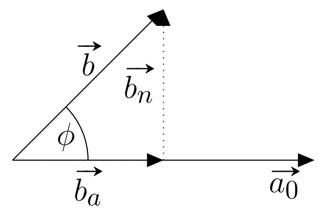
$a = 1 \Rightarrow Rang A = Rang(A|B) = 2 < 3$

$\Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen

Also sind die Vektoren im Fall $a = 1$ linear abhängig, andernfalls linear unabhängig.

1.10 Das Skalarprodukt

Wir wollen die Projektion eines Vektors $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a_0}$ bestimmen. Das Ergebnis ist die gerichtete Strecke b_a.



Die Gleichung für die Projektion lautet:
$b_a \; = \; \| \vec{b} \| \cos(\phi)$

Wir definieren nun eine Rechenoperation, die einem gegebenen Vektor $\vec{b}$ die Projektion in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{a_0}$ zuordnet:

$$\vec{a_0} \circ \vec{b} \; := \; \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \circ \vec{b} \; = \; b_a \; = \; \|\vec{b}\| \cos(\phi)$$

Diese Definition wird nun auf beliebige Vektoren erweitert.

Skalarprodukt
Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ definieren wir das **Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \circ \vec{b} \; := \; \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\phi) \quad \text{mit} \quad \phi \in [0, \pi]$$

Die folgenden Rechenregeln lassen sich geometrisch beweisen:

Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} \; = \; \vec{b} \circ \vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\lambda \vec{a}) \circ \vec{b} \; = \; \lambda \, \vec{a} \circ \vec{b}$

Distributivgesetz: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \; = \; \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

1.10.1 Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

Die Vektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ und $\vec{e_z}$ sind orthonormal:

$\vec{e_i} \circ \vec{e_i} \; = \; \|\vec{e_i}\|^2 \; = \; 1$ für $i \in \{x, y, z\}$ $\qquad \vec{e_x} \circ \vec{e_y} \; = \; \vec{e_x} \circ \vec{e_z} \; = \; \vec{e_y} \circ \vec{e_z} \; = \; 0.$

Es folgt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} \; = \; \left(a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z}\right) \circ \left(b_x \vec{e_x} + b_y \vec{e_y} + b_z \vec{e_z}\right) \; = \; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \circ \vec{b} \; = \; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich ein Vektor $\vec{b}$ für einen gegebenen Vektor $\vec{a}$ in einen Vektor parallel zu $\vec{a}$ (Orthogonalprojektion) und einen Vektor senkrecht zu $\vec{a}$ (Normalprojektion) zerlegen:

Orthogonalprojektion

$$\vec{b_a} \; = \; \left(\vec{a_0} \circ \vec{b}\right) \vec{a_0} \; = \; \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \, \vec{a}$$

Normalprojektion

$$\vec{b_n} \; = \; \vec{b} - \vec{b_a}$$

Beispiel: Orthogonalprojektion

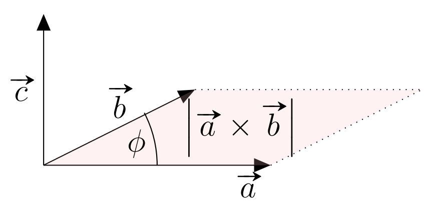
Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ soll in Vektoren parallel bzw. senkrecht zu einem zweiten Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zerlegt werden.

Die Orthogonalprojektion ergibt sich zu:

$$\vec{b_a} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{4^2 + 3^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.11 Das Vektorprodukt



Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\phi \in [0, \pi]$ der von $\vec{a}, \vec{b}$ eingeschlossene Winkel. Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist der eindeutig bestimmte Vektor mit:

1. $\|c\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, sin\,(\phi)$
2. $(\vec{c} \perp \vec{a}) \wedge \left(\vec{c} \perp \vec{b}\right)$
3. Die positiven Orientierungen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Bemerkungen:

- Geometrisch ist $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Sind zwei Vektoren linear abhängig, so ist ihr Kreuzprodukt der Nullvektor: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Es gelten die Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

1.11.1 Koordinatendarstellung des Vektorprodukts

Die Vektorentripel $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, $(\vec{e_z}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$, $(\vec{e_y}, \vec{e_z}, \vec{e_x})$ bilden Rechtssysteme:

$$\vec{e_x} \times \vec{e_y} = -\vec{e_y} \times \vec{e_x} = \vec{e_z} \qquad \vec{e_z} \times \vec{e_x} = -\vec{e_x} \times \vec{e_z} = \vec{e_y}$$

$$\vec{e_y} \times \vec{e_z} = -\vec{e_z} \times \vec{e_y} = \vec{e_x} \qquad \vec{e_i} \times \vec{e_i} = \vec{0} \quad \text{für} \quad i \in \{x, y, z\}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}\right) \times \left(b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z}\right) \\
&= \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\vec{e_x} + \left(a_zb_x - a_xb_z\right)\vec{e_y} + \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\vec{e_z} \\
&= \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Das führt auf das Rechenschema:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \cancel{a_x} & \cancel{b_x} \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung des Vektorproduktes

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

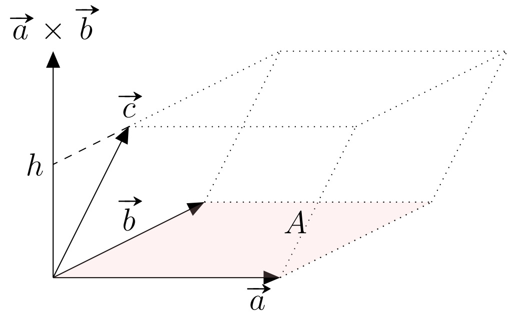
Beispiel: Der zu zwei gegebenen Vektoren orthogonale Vektor

Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}$, der auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

Ein solcher Vektor $\vec{c}$ ist gegeben durch:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.12 Das Spatprodukt



Es soll das Volumen des gezeigten **Parallelepipeds/Spats** bestimmt werden.
Für das Volumen des Spats gilt zunächst: $V_{Spat} = A \cdot h$. Dabei ist A das Volumen der Grundseite und h die Höhe des Spats. Es folgt für die Fläche A:

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

Die Höhe h ergibt sich als Betrag der Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{c}$ in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$h = \left\| \frac{\vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\| = \frac{\left|\vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Damit ergibt sich das Spatvolumen zu

$$V_{Spat} = A \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \frac{\left|\vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \left|\vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$$

Spatprodukt
Das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lautet

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Bemerkungen:

- Für das Vorzeichen des Spatproduktes gilt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} \begin{cases} < 0 & \text{Die positiven Richtungen der Vektoren } \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \\ & \text{bilden in dieser Reihenfolge ein Linkssystem.} \\ = 0 & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ liegen in einer Ebene (\textbf{komplanar}) und sind daher linear abhängig.} \\ > 0 & \text{Die positiven Richtungen der Vektoren } \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \\ & \text{bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.} \end{cases}$$

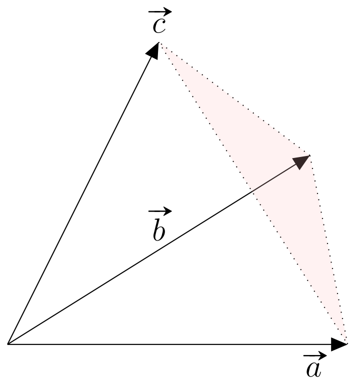
- Das Spatprodukt ist zyklisch vertauschbar:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \circ \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \circ \vec{a}$$

  Es gilt aber:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \circ \vec{c} = -\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \circ \vec{b} = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \circ \vec{a}$$

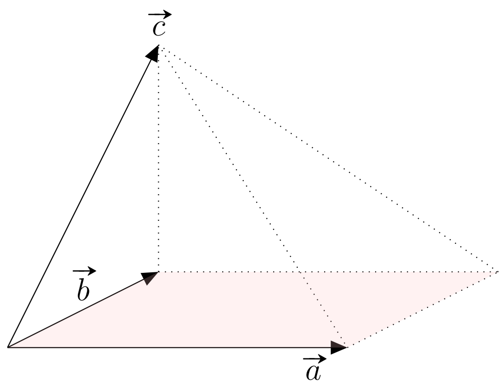
1.12.1 Das Volumen eines Tetraeders



Der oben gezeigte Spat lässt sich in sechs kongruente Tetraeder zerlegen. Damit ergibt sich das Volumen eines aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Tetraeders zu:

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} V_{Spat} = \frac{1}{6} \left| \vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right|$$

1.12.2 Das Volumen einer Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche



Aus zwei der oben gezeigten Tetraeder lässt sich eine Pyramide mit einem von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramm als Grundfläche und der Kante $\vec{c}$ bilden. Dieses hat dann das Volumen

$$V_{Pyramide} = 2\, V_{Tetraeder} = \frac{1}{3} \left| \vec{c} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right|$$

1.13 Aufgaben

Aufgabe 1

Der Vektor $\vec{d}$ soll jeweils als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ geschrieben werden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck mit den Punkten $A(0;0;2), B(0;2;0), C(2;0;0)$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{a} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

b) Berechnen Sie den Vektor $\vec{s_C}$ der Seitenhalbierenden der Seite AB sowie seine Länge.

c) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $\vec{b_C}$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{c}$.

d) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

Aufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ y \end{pmatrix}$.

a) Wie muss man y wählen, damit die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar sind? Stellen Sie für diesen Fall $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

b) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein? Welchen Richtungswinkel hat $\vec{a}$ mit der x-Achse des Koordinatensystems?

Kapitel 2

Analytische Geometrie

2.1 Darstellung linearer Strukturen im dreidimensionalen Raum

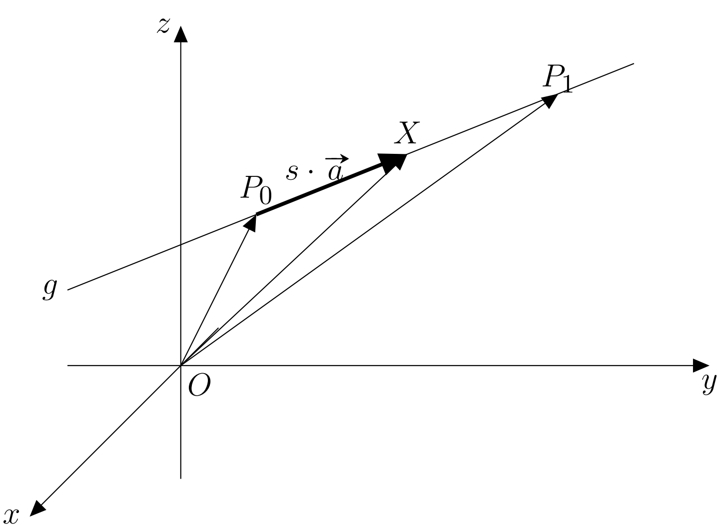
Im dreidimensionalen Raum $\left(\text{dem Vektorraum } \mathbb{R}^3\right)$ gibt es drei Typen von linearen Strukturen:

- Punkte
- Geraden
- Ebenen

Ein Punkt P wird dargestellt durch drei Koordinaten $(x|y|z)$. Einem solchen Punkt kann ein Ortsvektor zugeordnet werden, der den Punkt mit dem Koordinatenursprung verbindet:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.1.1 Darstellung von Geraden im Raum



Eine Gerade im Raum ist vollständig bestimmt durch

1. die Angabe eines Punktes $P_0(x_0|y_0|z_0)$ auf der Geraden und einer Richtung $\vec{a}$:
   Ist $X(x|y|z)$ ein beliebiger weiterer Punkt auf der Geraden, so ist der Vektor von P_0 nach X parallel zum Vektor $\vec{a}$:
   $$\overrightarrow{P_0X} \parallel \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0} = s \cdot \vec{a} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$
   Es folgt die:

   Punkt-Richtungsgleichung: $$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= x_0 + s \cdot a_x \\ y &= y_0 + s \cdot a_y \\ z &= z_0 + s \cdot a_z \end{aligned}$$

2. die Angabe zweier Punkte $P_0(x_0|y_0|z_0)$ und $P_1(x_1|y_1|z_1)$ auf der Geraden:

   Ist $X(x|y|z)$ ein beliebiger weiterer Punkt auf der Geraden, so ist der Vektor von P_0 nach P_1 parallel zum Vektor von P_0 nach X:

$$\overrightarrow{P_0X} \parallel \overrightarrow{P_0P_1} \Rightarrow \overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0} = s \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

   Es ergibt sich die

   Zwei-Punkte-Gleichung: $$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} x &=& x_0 + s \cdot (x_1 - x_0) \\ y &=& y_0 + s \cdot (y_1 - y_0) \\ z &=& z_0 + s \cdot (z_1 - z_0) \end{array}$$

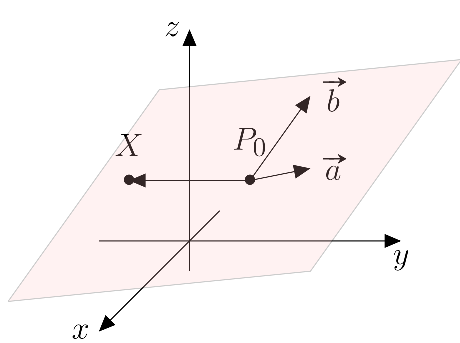
Beispiel: Konstruktion einer Geraden aus zwei Punkten
Gesucht ist die Gerade durch die Punkte $P_0(1|2|3)$ und $P_1(4|1|3)$. Diese ist

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Darstellung von Ebenen im Raum

Eine Ebene im Raum kann durch folgende Angaben eindeutig bestimmt werden:

1. ein Punkt $P_0(x_0|y_0|z_0)$ ($\overrightarrow{OP_0}$ **Stützvektor**) in der Ebene und zweier linear unabhängiger **Richtungsvektoren** $\vec{a}$, $\vec{b}$:



Ist $X(x|y|z)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene, so liegt der Vektor $\overrightarrow{P_0X}$ in der Ebene. Daher sind Vektoren $\{\overrightarrow{P_0X}, \vec{a}, \vec{b}\}$ linear abhängig:

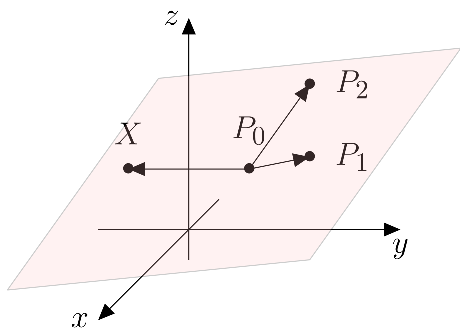
$$\overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

Dies ergibt die

Punkt-Richtungsgleichung einer Ebene

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

2. drei Punkte $P_0(x_0|y_0|z_0)$, $P_1(x_1|y_1|z_1)$ und $P_2(x_2|y_2|z_2)$, die nicht auf einer Geraden liegen:



Ist $X(x|y|z)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene, so liegen $\overrightarrow{P_0X}$,$\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{P_0P_2}$ in einer Ebene:

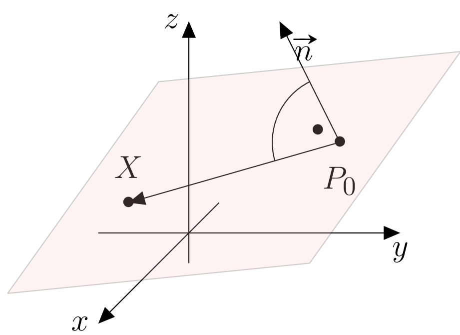
$$\overrightarrow{P_0X} \;=\; \overrightarrow{0X} - \overrightarrow{OP_0} \;=\; s \cdot \overrightarrow{P_0P_1} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_2} \quad \text{mit} \quad s, t \;\in\; \mathbb{R}$$

Dies ergibt die:

Drei-Punkte-Gleichung einer Ebene

$$\overrightarrow{OX} \;=\; \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \overrightarrow{P_0P_1} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_2}$$

3. ein Punkt $P_0(x_0|y_0|z_0)$ und ein **Normalenvektors** $\vec{n}$, der senkrecht auf der Ebene steht:



Ist $X(x|y|z)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene, so stehen die Vektoren $\vec{n}$ und $\overrightarrow{P_0X}$ senkrecht aufeinander.

$$\vec{n} \;\perp\; \overrightarrow{P_0X} \;\Rightarrow\; 0 \;=\; \vec{n} \circ \overrightarrow{P_0X}$$

Dies ergibt die

Normalform der Ebene

$$0 \;=\; \vec{n} \circ \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0}\right)$$

Hat der Vektor $\vec{n}$ die Länge 1, so bezeichnet man diese Darstellung als **Hessesche Normalform**.

4. eine Gleichung für drei Variablen x, y, z:

Angenommen, eine Ebene ist in der Normalform gegeben. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\vec{n} \;=:\; \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \overrightarrow{OX} \;=:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, -\vec{n} \circ \overrightarrow{OP_0} \;=:\; D$$

folgt:

$$0 \;=\; \vec{n} \circ \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0}\right) \;\Leftrightarrow\; A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \;=\; 0$$

Weil die Komponenten A, B, C und der Punkt P_0 beliebig gewählt werden können, gilt:

Koordinatendarstellung der Ebene
Für $A, B, C, D \;\in\; \mathbb{R}$ definiert, falls nicht $A \;=\; B \;=\; C \;=\; 0$ gilt, die Gleichung

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \;=\; 0$$

eine Ebene.

Beispiel: Achsenabschnittsform

Geht eine Ebene durch die Punkte $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, so ist die Ebene durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

gegeben.

Der Wechsel zwischen den Darstellungsformen der Ebene

Beispiel: Parameterform $\longrightarrow$ Normalform, Koordinatenform
Eine Ebene E ist in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es sollen die Normalform und die Koordinatenform der Ebene bestimmt werden.

Ein Normalvektor für die Ebene ergibt sich durch das Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Stützvektors ergeben sich Normalform und Koordinatenform:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{Normalform} \\ 0 &= -7x + y + 3z - 4 \quad \text{Koordinatenform} \end{aligned}$$

Beispiel: Koordinatendarstellung $\longrightarrow$ Normalform, Parameterform
Eine Ebene E ist in der Form

$$0 = 3x + 4y - 6 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}y + 2$$

gegeben. Es sollen die Normalform und die Parameterform bestimmt werden.

Zunächst werden die Bezeichnungen $3s := y$ und $t := z$ gewählt. Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y + 2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor der Ebene lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich die Normalform

$$0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2.2 Geometrische Beziehungen zwischen linearen Strukturen

2.2.1 Lagebeziehungen und die Berechnung von Schnittmengen

Lagebeziehungen und Schnittmengen zweier Geraden

Wir gehen davon aus, dass zwei Geraden in Punkt-Richtungsform vorliegen:

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad \vec{x} = \vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} \\ g_2 &: \quad \vec{x} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Die verschiedenen Lagebeziehungen von Geraden lassen sich wie folgt klassifizieren:

- **identische Geraden:**

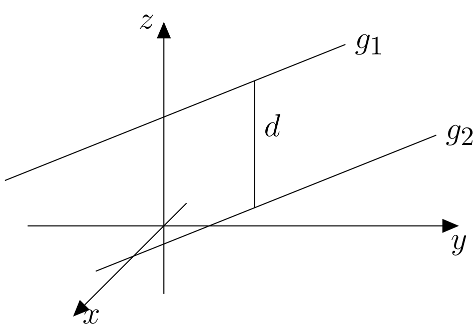
  Damit zwei Geraden identisch sind, müssen die folgenden Beziehungen erfüllt sein:

  1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
  2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a} = \vec{0}$

  In diesem Fall gibt es unendlich viele Schnittpunkte. Die Schnittmenge lautet:

$$M = \left\{ X \middle| \ \overrightarrow{OX} = \vec{r}_1 + s \cdot \vec{a}, \, s \in \mathbb{R} \right\}$$

- **parallele, nicht identische Geraden:**

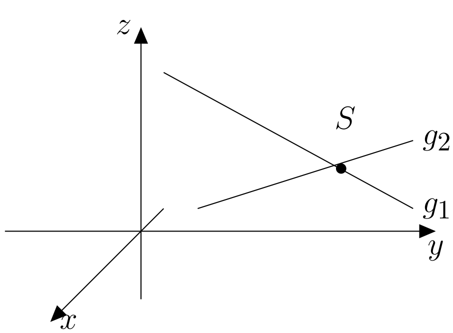


  Damit zwei Geraden parallel aber nicht identisch sind, müssen die folgenden Beziehungen erfüllt sein:

  1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
  2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \nparallel \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a} \neq \vec{0}$

  In diesem Fall gibt es keine Schnittpunkte. Die Schnittmenge ist leer.

- **Geraden mit Schnittpunkt:**



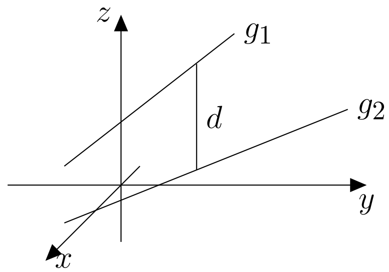
  Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind und die Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, gibt es einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt S. Die Bedingungen hierfür können geschrieben werden als:

  1. $\vec{a} \nparallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$
  2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig
     $\Leftrightarrow \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$

  Der Schnittpunkt ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{b}$$

- **Windschiefe Geraden (nur in $\mathbb{R}^3$!):**



Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind und die Geraden **nicht** in einer gemeinsamen Ebene liegen, bezeichnet man die Geraden als **windschief**. Die Bedingungen dafür können geschrieben werden als

1. $\vec{a} \nparallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$
2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,, \vec{a}, \vec{b}$ sind linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \neq 0$$

In diesem Fall gibt es keinen Schnittpunkt.

Beispiel: Lagebeziehung von Geraden
Der Parameter a ist so zu bestimmen, dass sich die Geraden schneiden. Für den entsprechenden Wert des Parameters ist der Schnittpunkt zu bestimmen.

$$g_1 \;:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 \;:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Im Grunde kann man direkt das LGS für die Schnittmenge lösen und daraus die Lagebeziehung ableiten. Zur Übung wird die Lagebeziehung hier aber schon zuvor bestimmt.

1. $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-a \\ a-4 \\ -1 \end{pmatrix} =: \vec{n} \neq \vec{0}$$
2. $$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 4-7 \\ -6+2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-a \\ a-4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 1-a$$

Die Geraden schneiden sich, wenn der letzte Ausdruck 0 wird, also für $a = 1$. Dann kann der Schnittpunkt berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt;

t	s	
1	-2	3
1	-3	4
2	-1	3

$\Rightarrow$

t	s	
1	-2	3
0	-1	1
0	3	-3

$\Rightarrow$

t	s	
1	0	1
0	1	-1
0	0	0

Daher ergibt sich der Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S = (5|-5|1)$$

Die Schnittmenge ist dann $M = \{(5|-5|1)\}$.

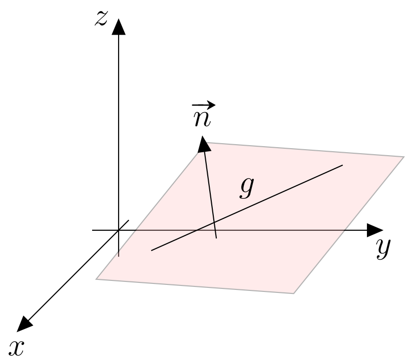
Lagebeziehungen und Schnittmengen von Geraden und Ebenen

Wir gehen davon aus, dass die Gerade g und die Ebene E in der folgenden Form gegeben sind:

$$g \;:\; \vec{x} \;=\; \vec{r}_1 + s \cdot \vec{a}$$

$$E \;:\; \vec{x} \;=\; \vec{r}_2 + t_1 \cdot \vec{b} + t_2 \cdot \vec{c}, \quad \vec{n} \;=\; \vec{b} \times \vec{c} \quad \text{oder} \quad 0 \;=\; \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_2)$$

- **Die Gerade liegt in der Ebene:**



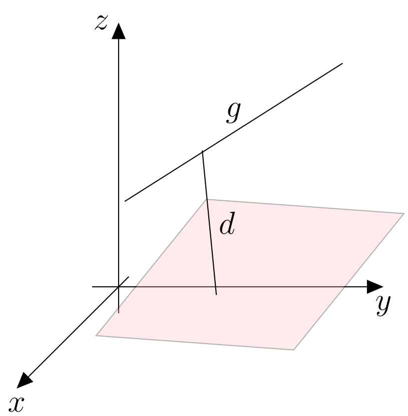
Die Gerade liegt in der Ebene, der Richtungsvektor der Geraden und die Verbindungslinie der Stützvektoren in der Ebene liegen.

1. $\vec{a} \circ \vec{n} \;=\; 0$
2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \circ \vec{n} \;=\; 0$

In diesem Fall gibt es unendlich viele Schnittpunkte, die Schnittmenge lautet:

$$M \;=\; \left\{ X \middle| \; \overrightarrow{OX} \;=\; \vec{r}_1 + s_1 \cdot \vec{a_1},\, s_1 \;\in\; \mathbb{R} \right\}$$

- **Die Gerade verläuft parallel zur Ebene:**

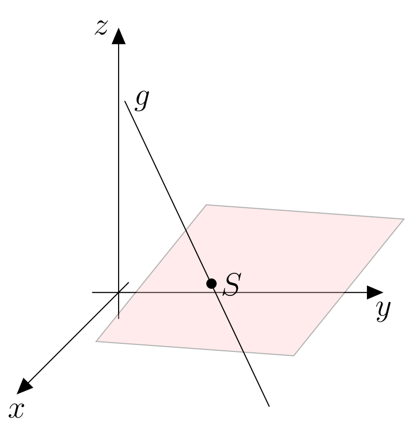


Damit die Gerade parallel zur Ebene verläuft, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $\vec{a} \circ \vec{n} \;=\; 0$
2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \circ \vec{n} \;\neq\; 0$

In diesem Fall gibt es keinen Schnittpunkt.

- **Die Gerade schneidet die Ebene:**



Die Bedingung dafür, dass die Gerade die Ebene in genau einem Punkt S schneidet, lautet:

$$\vec{a} \circ \vec{n} \;\neq\; 0$$

Den Schnittpunkt kann man erhalten, indem man das Gleichungssystem

$$\vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} \;=\; \vec{r}_2 + t_1 \cdot \vec{b} + t_2 \cdot \vec{c}$$

löst. Liegt die Ebene in der Normalform vor, erhält man den Schnittpunkt durch

$$0 \;=\; \vec{n} \circ (\vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} - \vec{r}_2) \;\Rightarrow\; s \;=\; \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \circ \vec{n}}{\vec{a} \circ \vec{n}}$$

Damit lautet der Ortsvektor des Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{OS} \;=\; \vec{r}_1 + \left(\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \circ \vec{n}}{\vec{a} \circ \vec{n}} \right) \cdot \vec{a}$$

Beispiel: Lagebeziehung von Geraden und Ebenen.
Es sind die Lagebeziehung und die Schnittmenge der Gerade g der Ebene E zu bestimmen:

$$g \;:\quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E \;:\quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Zunächst kann man die Ebene in Normalform schreiben:

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times\cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 0 \;=\; \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right)$$

Damit lautet die Bedingung für die Existenz eines Schnittpunktes:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix} \;=\; 6 \;\neq\; 0$$

Die Gerade schneidet also die Ebene. Der Schnittpunkt kann wie folgt ermittelt werden:

$$0 \;=\; \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}2+s\\2-s\\1+s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1+s\\1-s\\-4+s\end{pmatrix} \;=\; 2+6s \quad\Rightarrow\quad s \;=\; -\frac{1}{3}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt zu

$$\overrightarrow{OS} \;=\; \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S \;=\; \left(\frac{5}{3}\,\middle|\,\frac{7}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$$

Lagebeziehungen und Schnittmengen von zwei Ebenen

Wir gehen davon aus, dass die Ebenen E_1 und E_2 in der folgenden Form gegeben sind:

$$E_1 \;:\; \vec{x} \;=\; \vec{r}_1 + s_1\cdot\vec{a} + s_2\cdot\vec{b}, \quad \vec{n_1} \;=\; \vec{a}\times\vec{b}$$

$$E_2 \;:\; \vec{x} \;=\; \vec{r_2} + t_1\cdot\vec{c} + t_2\cdot\vec{d}, \quad \vec{n_2} \;=\; \vec{c}\times\vec{d} \quad \text{oder} \quad 0 \;=\; \vec{n_2}\circ(\vec{r} - \vec{r_2})$$

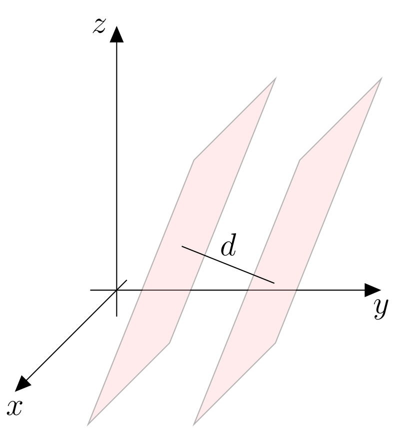
- **Die Ebenen sind identisch:**

  Zwei Ebenen sind identisch, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind und der Verbindungsvektor der Stützvektoren in beiden Ebenen liegt.

  1. $\vec{n}_1 \;\|\; \vec{n}_2 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{n}_1\times\vec{n_2} \;=\; \vec{0}$
  2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot\vec{n_1} \;=\; \vec{0}$

  In diesem Fall ist die Schnittmenge eine Ebene, d.h es gibt unendlich viele Lösungen, die von zwei Parametern bestimmt werden: $M \;=\; \left\{X \,\middle|\, \overrightarrow{OX} \;=\; \vec{r}_1 + s_1\cdot\vec{a} + s_2\cdot\vec{b},\; s_1, s_2 \;\in\; \mathbb{R}\right\}$

- **Die Ebenen verlaufen parallel:**

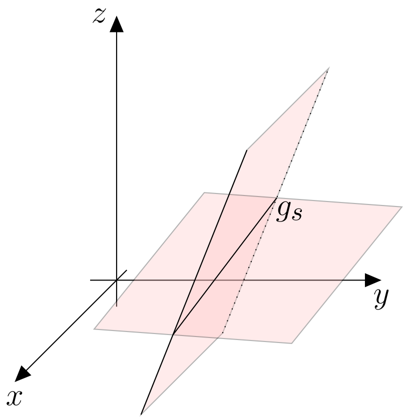


Damit die Ebenen parallel sind, muss gelten:

1. $\vec{n}_1 \;\|\; \vec{n}_2 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{n}_1\times\vec{n_2} \;=\; \vec{0}$
2. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot\vec{n_1} \;\neq\; \vec{0}$

In diesem Fall gibt es keinen Schnittpunkt, die Schnittmenge ist leer.

- **Die Ebenen schneiden sich:**



Fallls

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq 0$$

gilt, schneiden sich die Ebenen entlang einer Schnittgerade g_S. Die Schnittgerade ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems

$$\vec{r}_1 + s_1 \cdot \vec{a} + s_2 \cdot \vec{b} \;=\; \vec{r}_2 + t_1 \cdot \vec{c} + t_2 \cdot \vec{d}$$

Bemerkung: Liegt die zweite Ebene in Normalform vor, lässt sich die Lösungen direkt angeben:

$$0 \;=\; \overrightarrow{n_2} \circ \left(\vec{r}_1 + s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b} - \overrightarrow{r_2}\right) \;\Rightarrow\; s_2 \;=\; \frac{(\overrightarrow{r_2} - \vec{r}_1 - s_1 \vec{a}) \circ \overrightarrow{n_2}}{\vec{b} \circ \overrightarrow{n_2}}$$

Damit ist die Schnittgerade:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \;&=\; \vec{r}_1 + s_1 \cdot \vec{a} + \left(\frac{(\overrightarrow{r_2} - \vec{r}_1 - s_1 \vec{a}) \circ \overrightarrow{n_2}}{\vec{b} \circ \overrightarrow{n_2}}\right) \cdot \vec{b} \\
&=\; \left(\vec{r}_1 + \frac{(\overrightarrow{r_2} - \vec{r}_1) \circ \overrightarrow{n_2}}{\overrightarrow{n_2} \circ \vec{b}} \cdot \vec{b}\right) + s_1 \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \circ \vec{n}_2}{\overrightarrow{n_2} \circ \vec{b}} \cdot \vec{b}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel: Lagebeziehung zweier Ebenen
Es sollen die Lagebeziehung und die Schnittmenge der Ebenen

$$E_1 \;:\; \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$E_2 \;:\; \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Zunächst gilt:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{n}_1 \;&=\; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \\
\vec{n}_2 \;&=\; \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \times \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1\\-7\\3\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow\; \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \;=\; \begin{pmatrix}16\\4\\4\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Die Ebenen schneiden sich also. Schreibt man die Ebenen E_1 in der Normalform und setzt die Parametergleichung der Ebene E_2 ein, so folgt:

$$0 \;=\; \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}-1+t-2u\\t+u\\2+2t+3u\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right) \;=\; 11 + 4t + 8u$$

$$\Rightarrow \qquad t \;=\; -\frac{11}{4} - 2u$$

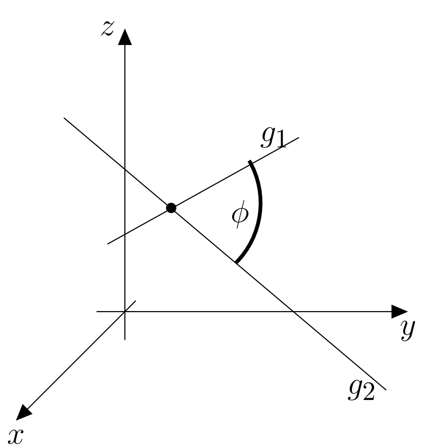
Es folgen die Gleichungen für die Schnittgerade und Schnittmenge

$$
\begin{aligned}
g_S \ : \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \left(-\frac{11}{4} - 2u\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}15\\11\\14\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix} \\
M &= \left\{-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}15\\11\\14\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix} \ \middle| \ u \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}
$$

2.2.2 Die Berechnung von Schnittwinkeln

Als Schnittwinkel zwischen zwei geometrischen Objekten verstehen wollen wir nur Winkel kleiner oder gleich 90° zulassen.

Der Schnittwinkel zweier Geraden:



Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden

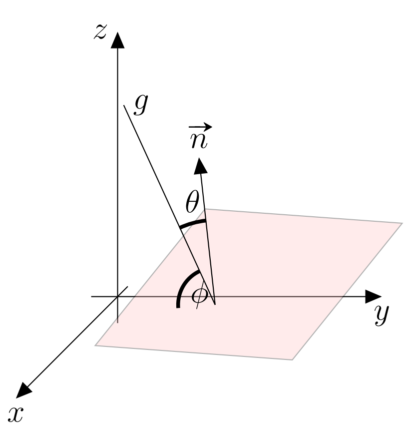
$$
\begin{aligned}
g_1 \ : \quad \vec{r} &= \vec{r}_1 + s\cdot\vec{a} \quad \text{und} \\
g_2 \ : \quad \vec{r} &= \vec{r}_2 + t\cdot\vec{b}
\end{aligned}
$$

kann mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet werden:

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\cos\phi \ = \ \frac{\|\vec{a}\circ\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

Der Schnittwinkel einer Gerade und einer Ebene:



Der Winkel zwischen einer durch

$$g \ : \quad \vec{r} \ = \ \vec{r}_0 + s\,\vec{a}$$

gegebenen Geraden g und einer durch

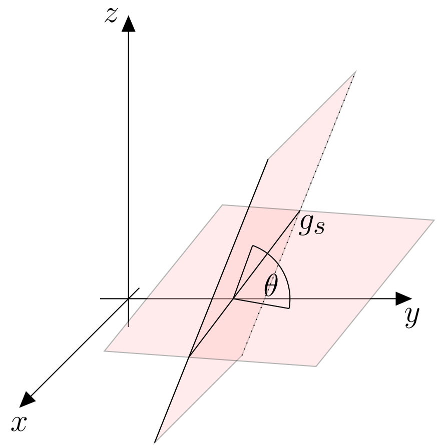
$$E \ : \quad 0 \ = \ \vec{n}\circ(\vec{x} - \vec{r}_1)$$

definierten Ebene E ist gegeben durch

Schnittwinkel einer Gerade und einer Ebene

$$\sin(\phi) \ = \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ = \ \cos(\theta) \ = \ \frac{\|\vec{n}\circ\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{n}\|}$$

Der Schnittwinkel zweier Ebenen



Der Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2, die durch

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{r} - \vec{r}_1) \circ \vec{n_1} \quad \text{und} \\ 0 &= (\vec{r} - \vec{r_2}) \circ \vec{n_2} \end{aligned}$$

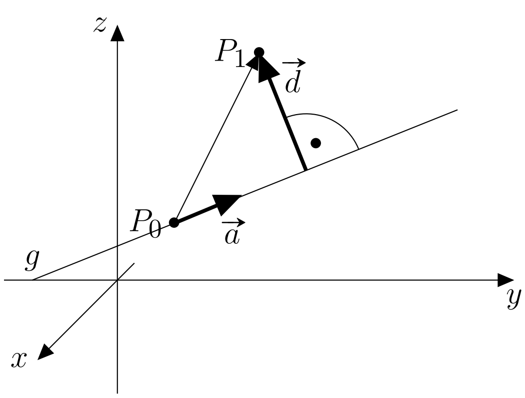
bestimmt sind, ist derselbe wie der zwischen ihren Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$:

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos(\theta) = \frac{\|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}$$

2.2.3 Die Berechnung von Abständen

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden



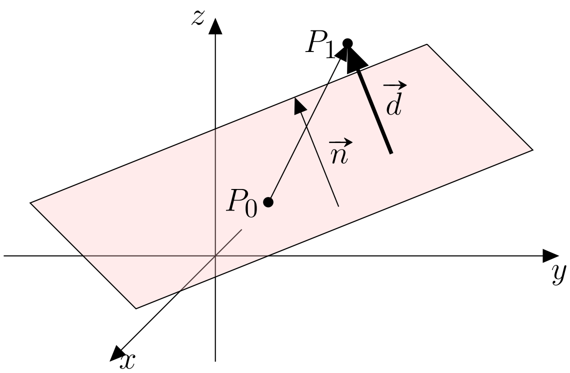
Unter dem Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden g versteht man den minimalen Abstand, den der Punkt von der Geraden hat. Dieser ist die Länge des Vektors $\vec{d}$, der P_1 mit g verbindet und der senkrecht auf g steht. Dieser Vektor ist die Normalprojektion des Vektors $\overrightarrow{P_0P_1}$ bezüglich des Vektors $\vec{a}$:

$$\vec{d} = \left(\overrightarrow{P_0P_1}\right)_{a\perp} = \overrightarrow{P_0P_1} - \left(\vec{a}^0 \circ \overrightarrow{P_0P_1}\right) \cdot \vec{a}^0$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned} d &= \left\| \overrightarrow{P_0P_1} - \left(\vec{a}^0 \circ \overrightarrow{P_0P_1}\right) \cdot \vec{a}^0 \right\| \\ &= \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{a}^0 \right\| \end{aligned}$$

Der Abstand eines Punktes von einer Ebene



Der Abstand eines Punktes P_1 von einer Ebene E kann als Länge der Orthogonalprojektion $\vec{d}$ eines beliebigen Verbindungsvektors $\overrightarrow{P_0P_1}$ der Ebene und des Punktes berechnet werden.

$$\vec{d} \;=\; \left(\overrightarrow{P_0P_1}\right)_n \;=\; \left(\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{P_0P_1}\right) \cdot \vec{n}^0$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d \;=\; \left|\overrightarrow{P_0P_1} \circ \vec{n}^0\right|$$

Bemerkung:
Liegt die Ebene in der Gestalt $0 \;=\; A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D$ vor und hat der Punkt P_1 die Koordinaten $P_1\,(x_1|y_1|z_1)$, so kann gilt:

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad D \;=\; -\overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n} \text{ für einen Punkt } P_0 \text{ in der Ebene}$$

$$\Rightarrow \quad d \;=\; \left|\overrightarrow{P_0P_1} \circ \vec{n}^0\right| \;=\; \left|\overrightarrow{OP_1} \circ \vec{n}^0 - \overrightarrow{OP_0} \circ \vec{n}^0\right| \;=\; \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Beispiel: Abstand eines Punktes von einer Ebene
Der Abstand des Punktes $P(1|4|1)$ von der Ebene

$$E \;:\; \quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ist zu berechnen.

Zunächst wird der Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{n}^0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Abstand:

$$d \;=\; \left|\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{P_0P}\right| \;=\; \left|\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1\right)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \;=\; \frac{2}{\sqrt{14}} \;=\; \frac{\sqrt{14}}{7}$$

Der Abstand einer Geraden von einer Ebene

Der Abstand einer Geraden von einer Ebene ist nur dann nicht 0, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft. Verläuft eine Gerade g parallel zu einer Ebene E, wobei

$$g \;:\; \quad \vec{x} \;=\; \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{a}$$

$$E \;:\; \quad \vec{x} \;=\; \overrightarrow{OP_1} + t_1 \cdot \vec{b} + t_2 \cdot \vec{c}, \quad \vec{n} \;=\; \vec{b} \times \vec{c} \quad \text{oder} \quad 0 \;=\; \vec{n} \circ \left(\vec{r} - \overrightarrow{OP_2}\right)$$

gilt, so kann der gesucht Abstand als der Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden g (z.B. P_0) zur Geraden E bestimmt werden:

$$d = \left|\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{P_0P_1}\right|$$

Der Abstand zweier Ebenen

Der Abstand zweier Ebenen ist nur dann nicht 0, wenn die Ebenen parallel verlaufen. Verläuft eine Gerade E_1 parallel zu einer Ebene E_2, wobei

$$E_1 : \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP_1} + s_1 \cdot \vec{a} + s_2 \cdot \vec{b}, \quad \vec{n_1} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E_2 : \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP_2} + t_1 \cdot \vec{c} + t_2 \cdot \vec{d}, \quad \vec{n_2} = \vec{c} \times \vec{d} \quad \text{oder} \quad 0 = \vec{n_2} \circ (\vec{r} - \vec{r_2})$$

sind, so kann man den Abstand der Ebenen als Abstand eines beliebigen Punktes auf der Ebene E_1, z.B. P_1, zur Ebene E_2 bestimmen:

$$d = \left|\vec{n}_2^0 \circ \overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

Der Abstand von Geraden

Der Abstand zweier Geraden ist genau dann nicht 0, wenn Sie parallel oder windschief sind.

- **der Abstand paralleler Geraden**
  Sind zwei parallele Geraden

$$g_1 : \quad \vec{x} = \vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} \quad \text{und}$$

$$g_2 : \quad \vec{x} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{b}$$

  gegeben, so kann der Abstand der Geraden als Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden g_2 (z.B. P_2) zur Geraden g_1 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} d &= \left\|\overrightarrow{P_1P_2} - \left(\vec{a}^0 \circ \overrightarrow{P_1P_2}\right) \cdot \vec{a}^0\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}^0\right\| \end{aligned}$$

- **der Abstand windschiefer Geraden**
  Sind zwei windschiefe Geraden

$$g_1 : \quad \vec{x} = \vec{r}_1 + s \cdot \vec{a} \quad \text{und}$$

$$g_2 : \quad \vec{x} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{b}$$

  gegeben, so liegen die Geraden in den parallelen Ebenen E_1 und E_2 mit

$$E_1 : \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP_1} + s_1 \cdot \vec{a} + s_2 \cdot \vec{b},$$

$$E_2 : \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP_2} + t_1 \cdot \vec{a} + t_2 \cdot \vec{b}$$

  Der Abstand der beiden Geraden kann dann als Abstand der beiden Ebenen bestimmt werden:

$$d = \left|\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{P_1P_2}\right| \quad \text{mit} \quad \vec{n}^0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|}$$

Beispiel: Abstand zweier Geraden
Es ist der Abstand der Geraden g_1 und g_2 bestimmt werden.

$$g_1 \ : \quad \vec{x} \ = \ \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 \ : \quad \vec{x} \ = \ \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Zunächst wird der Normalenvektor berechnet:

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix}-8\\-1\\2\end{pmatrix} \ =: \ \vec{n} \neq \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{n}^0 \ = \ \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \begin{pmatrix}-8\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich also oder sind windschief. In beiden Fällen ergibt sich ihr Abstand zu

$$d \ = \ \left| \vec{n}^0 \circ \left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \right) \right| \ = \ \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \left| \begin{pmatrix}-8\\-1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \right| \ = \ \frac{1}{\sqrt{69}}$$

2.2.4 Die Konstruktion von Spiegelpunkten

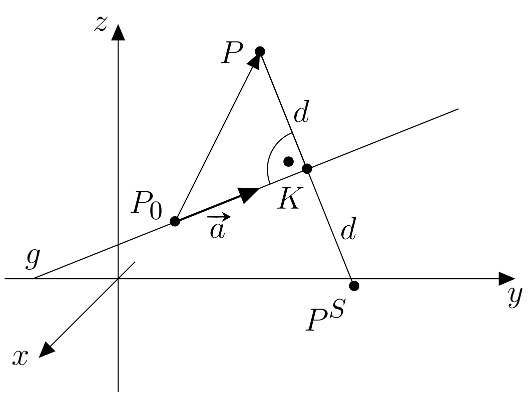
Sind ein Punkt P und eine Gerade/Ebene gegeben, so kann man den Punkt an der Gerade/Ebene spiegeln. Der Spiegelpunkt P_S, der dadurch entsteht hat die folgenden Eigenschaften:

1. Der Vektor $\overrightarrow{PP_S}$ steht senkrecht auf der Gerade/Ebene.
2. Der Abstand d des Spiegelpunktes von der Gerade/Ebene ist gleich dem Abstand des Punktes von der Gerade/Ebene.

Diese beiden Eigenschaften ermöglichen die folgende Konstruktionsvorschrift:

- Konstruktion der Geraden $g_\perp$, die senkrecht auf der Geraden/Ebene steht und durch den Punkt P geht.
- Bestimmung der Schnittpunktes K (**Knotenpunkt**) von $g_\perp$ mit der Geraden/Ebene.
- Bestimmung des Ortsvektors des Spiegelpunktes als $\overrightarrow{OP_S} \ = \ \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \overrightarrow{KP}$.

Die Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



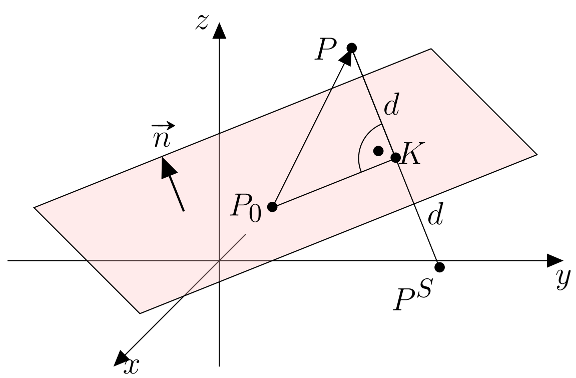
Der Vektor $\overrightarrow{KP}$ ist gegeben durch die Normalprojektion von $\overrightarrow{P_0P}$ auf den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden:

$$\overrightarrow{KP} \ = \ \overrightarrow{P_0P} - \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{a}^0 \right) \cdot \vec{a}^0$$

Damit folgt der Ortsvektor des Spiegelpunktes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_S} \ &= \ \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \overrightarrow{KP} \\ &= \ \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \overrightarrow{P_0P} + 2 \cdot \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{a}^0 \right) \cdot \vec{a}^0 \\ &= \ \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{PP_0} + 2 \cdot \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{a}^0 \right) \cdot \vec{a}^0 \end{aligned}$$

Spiegelung eines Punktes an einer Ebene



Der Vektor $\overrightarrow{KP}$ ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{KP} = \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n}^0\right) \cdot \vec{n}^0$$

Damit folgt der Ortsvektor des Spiegelpunktes:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_S} &= \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \overrightarrow{KP} \\ &= \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n}^0\right) \cdot \vec{n}^0\end{aligned}$$

Beispiel: Die Spiegelung einer Punktes an einer Geraden
Der Punkt $P(1|1|5)$ soll an der Gerade

$$g : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gespiegelt werden.

Zunächst muss die Senkrechte auf der Geraden durch P bestimmt werden.

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P} - \left(\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{a}^0\right) \cdot \vec{a}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Lotgerade:

$$g_\perp : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von Gerade und Lotgerade ist dann:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Einsetzen ergibt den Knotenpunkt $K(1|0|3)$. Für den Spiegelpunkt erhält man:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \overrightarrow{KP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und die Ebene E_1.

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Ebene E_1 und den Spiegelpunkt des Punktes $A(4|3|0)$ bezüglich der Ebene E_1.

b) Alle Spiegelpunkte der Geraden g_1 bilden eine Spiegelgerade g_3.
Geben Sie eine Gleichung der Spiegelgeraden an.
Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_1 und g_3.

c) Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E_2, in der die Geraden g_1 und g_3 liegen.
Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

d) Gibt es einen Parameter a, so dass die Gerade g_2 die Gerade g_1 schneidet?

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|-3)$ und $B(1|-1|0)$ sowie die Ebene E_1 mit der Gleichung $2x - y + 2z = 3$.

a) Welcher der Punkte A und B liegen in der Ebene E_1?

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt L einer zu E_1 senkrechten Geraden g_1 durch den Punkt A mit der Ebene E_1 (Lotfußpunkt L vom Punkt A auf die Ebene E_1) und den Flächeninhalt des Dreiecks ABL.

c) Geben Sie die Parameterform einer Ebene E_2 an, in der das Dreieck ABL liegt.

Aufgabe 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(12; 1; 4)$, $B(4; 5; -4)$ und $C(0; -5; 4)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.

b) Weisen Sie nach, dass C in der Symmetrieebene der Punkte A und B liegt. welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Dreieck ABC?

c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der die Punkte C und $D(2|3|6)$ liegen.
Welche Beziehung haben die Richtung der Geraden g und die Richtung der Geraden AB zueinander?

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABDC$.

Hinweis: Eine Symmetrieebene der Punkte A und B ist die Ebene, an der A gespiegelt werden muss, um B zu erhalten.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Gerade g, die parallel zur y-Achse verläuft und durch den Punkt $P(1;2;3)$ geht, sowie die Ebene $E\ :\ 12x - 9y - 4z = 36$.

a) Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden.

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und der Ebene E.

c) Berechnen Sie die Punkte, in denen die Ebene E von den Koordinatenachsen durchstoßen wird.

d) Welchen Abstand hat die Ebene vom Koordinatenursprung?

e) Die Gerade g und der Koordinatenursprung liegen in einer weiteren Ebene E_2. Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die Lage der Gerade g zu der Ebene E. Bestimmen Sie, falls möglich, den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

$$E_1\ :\ \vec{r} = t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix} \qquad g\ :\ \vec{r} = \begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Gesucht ist eine zu E_1 parallele Ebene E_2 im Abstand $d = \sqrt{30}$ von E_1.

Aufgabe 6

Gegeben seien zwei Ebenen und eine Gerade im Raum:

$$E_1\ :\ x + 2y - 3z = -1$$
$$E_2\ :\ 2x - y + z = 2$$
$$g\ :\ \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Schnittgerade g_S der beiden Ebenen.

b) Gibt es einen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den sich die gegebene Gerade g und die Schnittgerade g_s schneiden? Berechnen Sie in diesem Fall den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

Aufgabe 7

Gegeben sind eine Ebene E_1 und eine Schar von Geraden g_c .

$$E_1\ :\ x + y = 0 \quad g_c\ :\ \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt A der Geraden $g_1(c = 1)$ mit der Geraden $g_{-2}(c = -2)$ sowie deren Schnittpunkte B und C mit der Ebene E_1 bilden ein Dreieck.

a) Untersuchen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E_1 sowie den Schnittwinkel der Ebene E_1 mit der Ebene E_2, in der das Dreieck ABC liegt.

c) Der Lotfußpunkt des Lotes vom Punkt A aud die Ebene E_1 sei D.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD$.

Kapitel 3

Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit

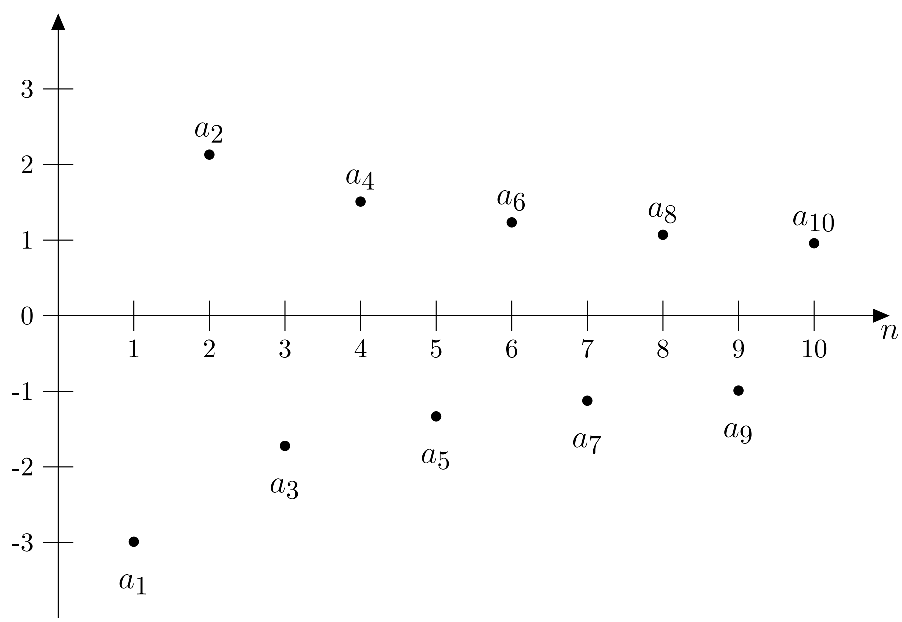
3.1 Zahlenfolgen

3.1.1 Definition von Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ ist eine eindeutige Zuordnung der natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu den reellen Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$:

$\langle a_n \rangle \;:\; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Wir bezeichnen die gesamte Folge mit $\langle a_n \rangle$, a_i ist das i-te Glied der Folge.



3.1.2 Die Darstellung von Folgen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Folge darzustellen:

- **Aufzählung der Elemente**
  Die einfachste Möglichkeit, eine Folge zu beschreiben besteht darin, ihre Elemente aufzuzählen, z. B.:

  $$\langle a_n \rangle \;=\; 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Das Problem an dieser Darstellungsform ist, dass eine Folge nicht eindeutig definiert. Selbst das Erraten der weiteren Folgenglieder ist nur in besonders einfachen Fällen möglich. Zum Beispiel ist für die Folge

$$\langle a_n \rangle = 3, 5, 7 \ldots$$

selbst unter der Annahme, dass sich die Folge nach dem angegeben Muster fortsetzt unmöglich zu beurteilen, ob es sich hier um die Folge der ungeraden Zahlen ab 3 oder um die Folge der ungeraden Primzahlen handelt.

- **Explizite Darstellung**
  Ein Folge kann als Funktion betrachtet werden, die die natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen abbildet. Dann kann man die Folge durch Angabe der Funktionsgleichung darstellen. Die Folge aller geraden natürlichen Zahlen lautet zum Beispiel

  $$\langle a_n \rangle = 2 \cdot n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

- **rekursive Darstellung**
  In vielen Fällen lässt sich eine Formel angeben, mit deren Hilfe sich aus den schon bekannten Folgegliedern das nächste Folgeglied berechnen lässt. Hierbei ist ist unbedingt nötig, über einen Startwert zu verfügen. Die Folge der geraden natürlichen Zahlen lässt sich zum Beispiel schreiben als:

  $$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + a_n \ \text{für} \ n \in \mathbb{N}$$

3.1.3 Die arithmetische Folge

Es soll die Summe der durch 7 teilbaren Zahlen zwischen 100 und 1000 berechnet werden. Zunächst kann diese Folge durch Aufzählung der Folgenglieder beschrieben werden:

$$\langle a_n \rangle = 105, 112, 119, \ldots 994$$

Einen klarere Darstellung ergibt sich in der rekursiven Form: $a_1 = 105; a_{n+1} = a_n + 7$. Die explizite Darstellung dieser Folge lässt sich induktiv gewinnen:

$$a_n = 7 + a_{n-1} = 2 \cdot 7 + a_{n-2} = (n-1) \cdot 7 + a_1 = 105 + (n-1) \cdot 7$$

Nun kann man die Summe S_k der ersten k Folgenglieder bilden, wobei $a_k = 994$ gelten soll

$$\begin{array}{rcccccccccc} 2 \cdot S_k & = & 105 & + & 112 & + & \ldots & + & 987 & + & 994 \\ & + & 994 & + & 987 & + & \ldots & + & 112 & + & 105 \\ & = & 1099 & + & 1099 & + & \ldots & + & 1099 & + & 1099 \\ & = & k \cdot 1099 \end{array}$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k) = \frac{k}{2} \cdot 1099$$

Nun muss noch bestimmt werden, welche Nummer k das Folgeglied mit dem Wert 994 hat.

$$a_k = 994 = 105 + (k-1) \cdot 7 \Rightarrow k = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128$$

Damit folgt $S_k = \dfrac{128}{2} \cdot 994 = 63616.$

Die im Beispiel berechnete Folge ist ein Beispiel einer **arithmetischen Folge**.

Die arithmetische Zahlenfolge
Ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ gleich einer beliebigen Konstanten $d \in \mathbb{R}$, also

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

so bezeichnet man $\langle a_n \rangle$ als arithmetische Zahlenfolge.
Die explizite Darstellung einer solchen Folge lautet

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Die Formel für die Summe S_k der ersten k Folgeglieder lautet

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k) = k \cdot a_1 + \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot d$$

3.1.4 Die geometrische Folge

Eine Stahlkugel wird aus einer Höhe von $2m$ auf eine Stahlplatte fallen gelassen. Nachdem sie auf der Stahlplatte aufgeschlagen ist, steigt sie wieder nach oben, erreicht aber nur noch ein Drittel der ursprünglichen Höhe. Dieser Vorgang wiederholt sich, wobei die Kugel nach jedem Schritt nur noch ein Drittel der vorherigen Höhe erreicht. Es ist zu berechnen, welche Wegstrecke die Kugel bis zum vierten Aufschlagen auf der Stahlplatte erreicht hat. Die Folge der erreichten Höhen lautet

$$\langle a_n \rangle = 2m, \frac{2}{3}m, \frac{2}{9}m \ldots$$

Die Folge lässt sich auch rekursiv darstellen

$$a_1 = 2m, a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n$$

Die explizite Darstellung lautet dann

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot a_{n-2} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 2m$$

Nun kann man die Summe S_k der ersten k Folgeglieder berechnen:

$$\begin{array}{c|lcccccccc}
 & S_k & = a_1 & + & \frac{1}{3} \cdot a_1 & + & \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot a_1 & + \ldots + & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot a_3 & & \\
- & \frac{1}{3} \cdot S_k & = & & \frac{1}{3} \cdot a_1 & + & \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot a_1 & + \ldots + & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot a_3 & + & \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot a_1 \\
\hline
 & \frac{2}{3} \cdot S_K & = a_1 & & & & & & & - & \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot a_1
\end{array}$$

Damit erhalten wir die Formel

$$S_k = a_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

Speziell für $n = 4$ lautet das Ergebnis:

$$S_4 = a_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{80}{27}$$

Die geometrische Zahlenfolge
Ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ gleich einer beliebigen Konstanten $q \in \mathbb{R}$, also

$$a_n = q \cdot a_{n-1},$$

so bezeichnet man $\langle a_n \rangle$ als geometrische Zahlenfolge.
Die explizite Darstellung einer solchen Folge lautet

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Formel für die Summe S_k der ersten k Folgeglieder lautet

$$S_k = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Beispiel: Zinsrechnung
Auf einem Bankkonto wird ein Betrag von $20000e$ eingezahlt. Die Bank gewährt Zinsen in der der Höhe von 5%. Nach wie vielen Jahren hat sich der angelegte Betrag verdoppelt?

Der nach n Jahren auf dem Bankkonto vorhandene Betrag wird mit a_{n+1} bezeichnet. Dann ist der zu Beginn („nach 0 Jahren") vorhandene Betrag $a_1 = 20000e$. Damit folgt:

$$a_{n+1} = a_n + 0.05 \cdot a_n = 1,05 \cdot a_n$$

Also handelt es sich um eine geometrische Folge mit $q = 1,05$ und $a_1 = 20000e$. Das Guthaben nach n Jahren ist somit

$$a_{n+1} = 20000e \cdot 1,05^n$$

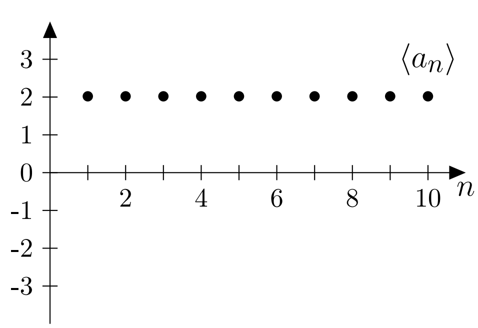
Nun soll sich dieses Guthaben nach k Jahren verdoppelt haben, also

$$40000e = 20000e \cdot 1,05^k \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$$

Somit hat sich das Guthaben nach 15 Jahren verdoppelt.

Spezielle Folgen, Eigenschaften von Folgen

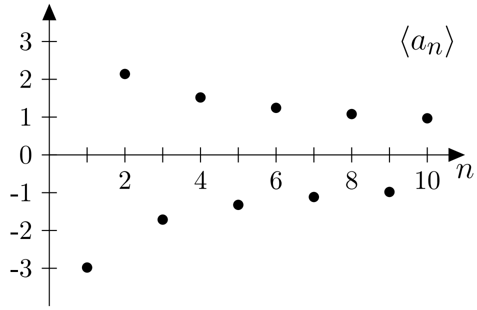
- **Stationäre Folge:**



Eine Folge $\langle a_n \rangle$, in der jedes Folgeglied den gleichen Zahlenwert hat, heißt stationäre Folge:

$$\langle a_n \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

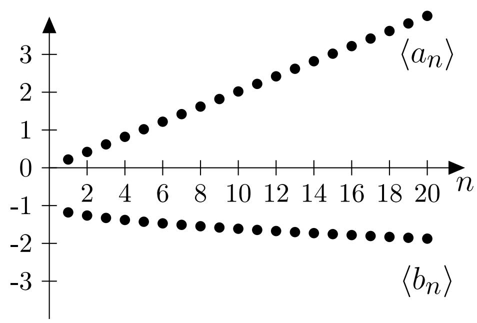
- **Alternierende Folge:**



Eine Folge $\langle a_n \rangle$, bei der jedes Folgeglied eine anderes Vorzeichen hat als sein Vorgänger, heißt alternierend:

$$a_n \, a_{n+1} \; < \; 0 \, \forall n \; \in \; \mathbb{N}.$$

- **Monotonie:**



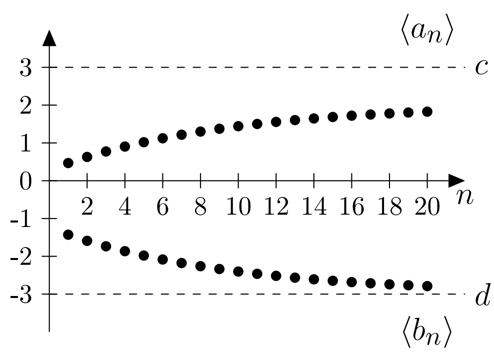
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt (streng) monoton steigend genau dann, wenn

$$a_n \; < \; a_{n+1} \, (a_n \; \leq \; a_{n+1}).$$

Eine Folge $\langle b_n \rangle$ heißt (streng) monoton fallend genau dann, wenn

$$a_n \; > \; a_{n+1} \, (a_n \; \geq \; a_{n+1}).$$

- **Beschränktheit:**



Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt nach oben beschränkt genau dann, wenn

$$\exists c \; \in \; \mathbb{R} \; : \; \forall n \; \in \; \mathbb{N} \; : \; a_n \; < \; c.$$

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt nach unten beschränkt genau dann, wenn

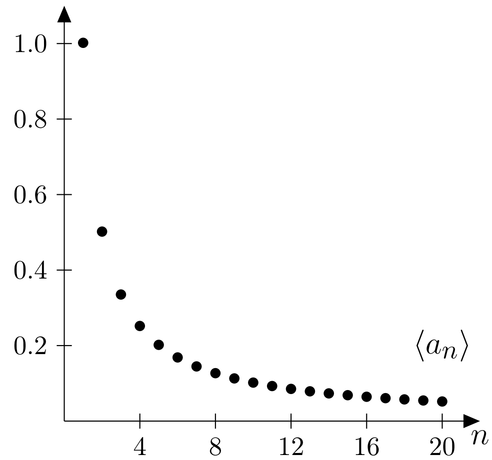
$$\exists c \; \in \; \mathbb{R} \; : \; \forall n \; \in \; \mathbb{N} \; : \; a_n \; < \; d.$$

3.1.5 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Konvergente Folgen

Bestimmte Zahlenfolgen $\langle a_n \rangle$ kommen ‘im Unendlichen’ einem bestimmten Zahlenwert $a \in \mathbb{R}$ beliebig nahe: Wenn wir n groß genug wählen, wird er Abstand der Folgeglieder a_n von a beliebig klein.

Wir betrachten $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 1/n$:



Der Graph lässt uns vermuten, dass diese Folge der Zahl 0 beliebig nahe kommt: $a = 0$.
Wir wählen willkürlich eine kleine Zahl, z. B.: $\epsilon = 10^{-6}$.
Der Abstand des Folgengliedes $a_n = 1/n$ zu 0 ist: $|a_n - 0| = 1/n$.
Damit dieser Abstand kleiner als ϵ ist, muss gelten: $1/n < \epsilon \Rightarrow n > 1/\epsilon = 10^6$.
Also ist für alle Zahlen $n > 10^6$ der Abstand von a_n zu 0 kleiner als 10^{-6}: $|a_n - a| < \epsilon$.

Wir können dieses Beispiel verallgemeinern und erhalten die folgende Definition:

Grenzwert einer Zahlenfolge:
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ hat den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 : \quad \exists n_0(\epsilon) : \quad n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon}$$

Man sagt in diesem Fall, die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen den Grenzwert a und schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \text{ bzw. } a_n \to a$$

Eine spezielle konvergente Folge ist die **Nullfolge**. Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist eine Nullfolge genau dann, wenn gilt:

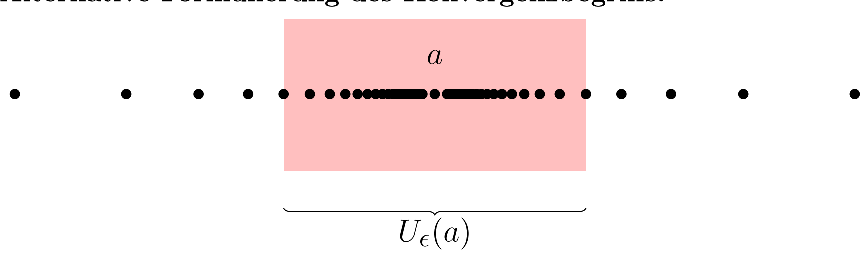
$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Bemerkung:
Man kann den Begriff der Konvergenz auch wie folgt formulieren:

- **ϵ-Umgebung:** Eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ von $a \in \mathbb{R}$ ist diem Mengen aller Punkte deren Abstand von a kleiner als ϵ ist:

$$U_\epsilon(a) = [a - \epsilon, a + \epsilon]$$

- **Alternative Formulierung des Konvergenzbegriffs:**



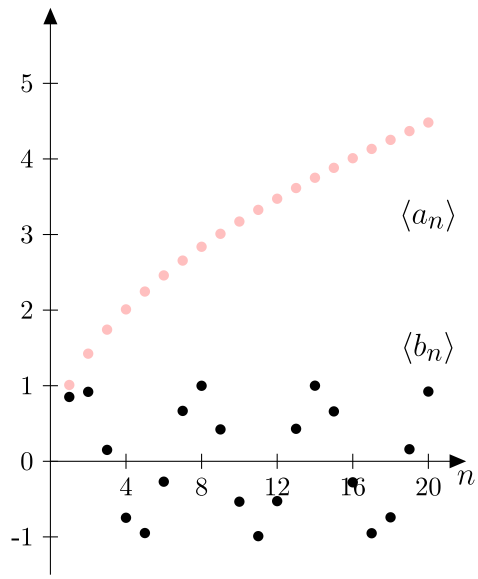
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen den Grenzwert a genau dann, wenn in einer beliebigen ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ von a alle bis auf endlich viele Folgeglieder liegen (d. h. alle Folgeglieder einem bestimmten Folgeglied $a_{n_0(\epsilon)}$):

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \exists n_0(\epsilon) : \quad n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow a_n \in U_\epsilon(a)$$

Divergente Folgen

Folgen, die nicht konvergent sind, heißen divergent.

Wir vergleichen die beiden divergenten Folgen $a_n = \sqrt{n}$ und $b_n = sin(n)$.



Das Verhalten der Folge $\rangle a_n \rangle$ ist gut vorherzusagen: Mit steigendem n werden die Folgenglieder beliebig groß.

Wir wählen willkürlich große Zahl, z. B.: $K = 10^6$.

Die Folgeglieder sind größer als K, wenn gilt: $\sqrt{n} > K \Rightarrow n > K^2 = 10^12$.

Also gilt für alle Zahlen $n > 10^12$: $a_n : a_n > K$.

Die Folge $\langle b_n \rangle$ hat dagegen kein solch vorhersagbares Verhalten für große Werte von n.

Bestimmte Divergenz:
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ bzw. $-\infty$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall K > 0 : \quad \exists n_0 (K) : \quad n \geq n_0 (K) \Rightarrow a_n > K$$

bzw.

$$\forall K > 0 : \quad \exists n_0 (K) : \quad n \geq n_0 (K) \Rightarrow a_n < -K$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

oder kürzer

$$a_n \to \infty \quad \text{bzw.} \quad a_n \to -\infty.$$

Falls eine Folge $\langle a_n \rangle$ weder konvergent noch bestimmt divergent ist, heißt sie **unbestimmt divergent**.

3.1.6 Zentrale Aussagen über die Konvergenz von Folgen

In einigen Situation ist es schwierig, Folgen auf ihre Konvergenz zu überprüfen, weil man ihren Grenzwert nicht kennt. In diesem Fall sind die folgenden Aussagen hilfreich:

- Jede konvergente Folge ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.
- Ist eine Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, so ist sie konvergent. Der Grenzwert ist die kleinste obere Schranke der Folge.
- Ist eine Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist sie konvergent. Der Grenzwert ist die größte untere Schranke der Folge.

- **Cauchy-Folgen**:
  Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. $\langle a_n \rangle$ heißt Cauchy-Folge genau dann, wenn gilt:
  $$\forall \epsilon > 0 : \quad \exists n_0(\epsilon) : \quad n, m > n_0(\epsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

Es wurde bereits bewiesen, dass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Weitere bekannte Folgen sind:

Konvergente Folgen

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & q \in [0;1) \\ 1 & q = 1 \\ \infty & q > 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1 \land k \in \ltimes$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_b(n)}{n} = 0 \quad b > 0 \land b \neq 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 1$

3.1.7 Rechenregeln für die Grenzwerte von Zahlenfolgen

Konvergente Folgen

Wir betrachten zwei konvergente Zahlenfolgen:

$$\langle a_n \rangle \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \langle b_n \rangle \text{ mit } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Wir können aus diesen Folgen eine neue Folge konstruieren:

$$\langle c_n \rangle \text{ mit } c_n = a_n + b_n.$$

Es stellt sich die Frage nach der Konvergenz dieser neuen Folge. Wenn a_n dem Wert a und b_n dem Wert b beliebig nahe kommt, liegt die Vermutung nahe, dass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + b$.

In der Tat: Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

$$|c_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| < |a_n - a| + |b_n - b|$$

Weil $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergieren, gibt es Zahlen n_0, n_1 mit:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_0$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_1$$

Wählen wir nun $n_2 = max\,(n_0, n_1)$ so folgt:

$$|c_n - (a + b)| < \epsilon \quad \forall n > n_2$$

Damit haben wir bewiesen: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + b$.

In ähnlicher Weise können weitere Folgen betrachtet werden. Wir erhalten den folgenden Satz:

Rechenregeln für Grenzwerte
Es seien konvergente Folgen $\langle a_n \rangle$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\langle b_n \rangle$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gegeben. Dann gilt sind die Folgen mit den angegebenen Grenzwerten konvergent:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \circ b_n) = a \circ b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ falls $b \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n^{b_n}\right) = a^b$ für $a_n > 0 \wedge a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} log\,(a_n) = log\,(a)$ für $a_n > 0 \wedge a > 0$

Bestimmte und unbestimmte Ausdrücke

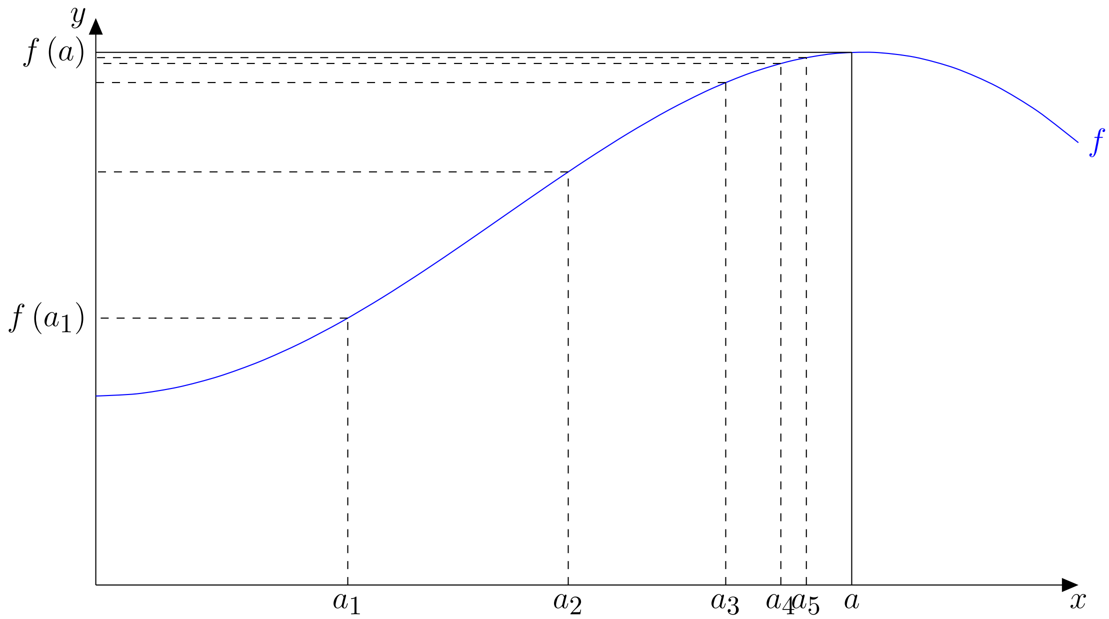
Auch wenn Folgen bestimmt divergent sind, lassen sich Aussagen über aus ihnen zusammengesetzte Folgen machen:

Diese werden analog zu den Aussagen für konvergente Folgen bewiesen.

Sind $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei konvergente bzw. bestimmt divergente Folgen, so gelten die Folgenden Beziehungen:

$a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n \to \infty$	$a_n \to a \wedge b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$
$a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n \circ b_n \to \infty$	$a_n \to a \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n \circ b_n \to \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a > 0 \end{cases}$
$a_n \to a \wedge b_n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$	$a_n \to a \wedge b_n \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty, \quad b_n > 0\,, a > 0$
$a_n \to \infty \wedge b_n \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty$	$a_n \to 0 \wedge b_n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty$
$a_n \to \infty \wedge b_n \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty$	$a_n \to \infty \wedge b_n \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$
$a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n^{b_n} \to \infty$	$a_n \to a \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n^{b_n} \to \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$
$a_n \to a \wedge b_n \to \infty \Rightarrow b_n^{a_n} \to \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \infty & a > 0 \end{cases}$	$a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty \Rightarrow a_n^{-b_n} \to \begin{cases} \infty & 0 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$
$a_n \to a \wedge b_n \to 0 \Rightarrow b_n^{a_n} \to \begin{cases} 0 & a > 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases}$	$a_n \to \infty \wedge b_n \to 0 \Rightarrow b_n^{a_n} \to 0, \quad b_n > 0$

3.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit



Angenommen, wir wollen das Verhalten einer Funktion in der Nähe einer Stelle a untersuchen. Dazu können wir eine Folge

$$\langle a_n \rangle \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } a_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$$

wählen. Wenn wir diese Folge in die Funktion f einsetzen, erhalten wir eine neue Folge $\langle f(a_n) \rangle$ mit

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n)$$

Diese Folge gibt die Funktionswerte von F in immer kleinerem Abstand zu a an. Es stellen sich folgende Fragen:

1. Konvergiert die neue Folge $\langle f(a_n) \rangle$?
2. Wenn wir eine andere Folge

   $$\langle b_n \rangle \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a \text{ und } b_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$$

   wählen, erhalten wir eine neue Folge $\langle f(b_n) \rangle$. Verhält sich diese wie $\langle f(a_n) \rangle$?
3. Falls $f(a)$ definiert ist: Gilt

   $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \stackrel{?}{=} f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \quad ?$$

3.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Zunächst zu den ersten beiden Fragen: Wir betrachten die beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(1/x)$ in der Nähe des Punktes $x_0 = 0$. Dazu setzen wir verschiedene Nullfolgen ein.

$f(x)$	x^2	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$		
a_n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n \cdot \pi}$	$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$	$\frac{2}{n \cdot \pi}$
$f(a_n)$	$\frac{1}{n^2}$	0	1	$1, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots$
Grenzwert	0	0	1	unbestimmt divergent

Folgerungen:

- Ist eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n \to a$ gegeben, so ist $\langle f(a_n) \rangle$ nicht automatisch konvergent.
- Für verschiedene Folgen $\langle a_n \rangle$ mit gleichem Grenzwert $a_n \to a$ kann $\langle f(a_n) \rangle$ unterschiedliches Verhalten zeigen.

Falls aber für alle Folgen $\langle a_n \rangle$ mit $a_n \to a$ die Funktionswerte $f(a_n)$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, charakterisiert dieses Verhalten die Funktion f selbst und wir erhalten:

Grenzwert einer reellen Funktion
Sind eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ geben, so hat f in x_0 den Grenzwert g genau dann, wenn gilt:

- Es gibt eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0, so dass f auf $D_f \supset (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ definiert ist
- Für jede Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ und $\lim\limits_{x \to x_n} = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

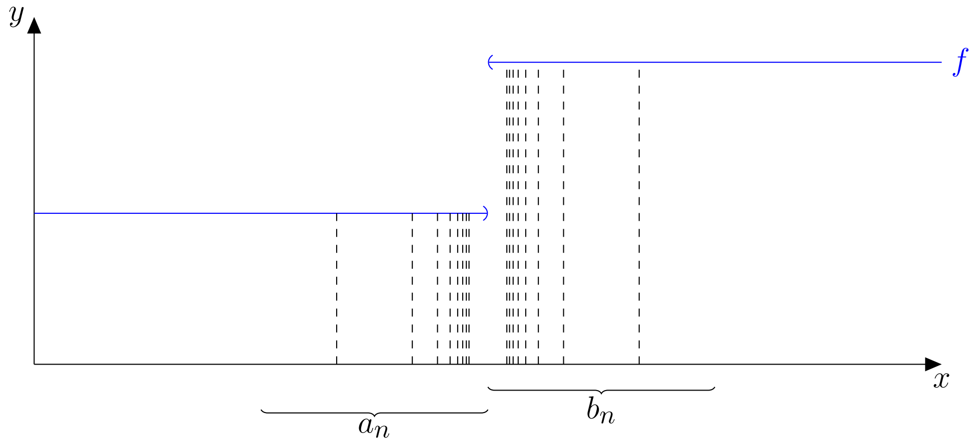
In diesem Fall schreiben wir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Dabei dürfen sowohl x_0 als auch g die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ sein.

Der Begriff des Grenzwertes lässt sich erweitern: In der nachfolgenden Skizze erkennt man, dass sowohl die Folgen $\langle f(a_n) \rangle$ als auch die Folge $\langle f(b_n) \rangle$ konvergieren, allerdings gegen unterschiedliche Grenzwerte.

Für die Frage, gegen welchen der beiden Grenzwerte eine beliebige Folge $\langle f(x_n) \rangle$ mit $x_n \to x_0$ konvergiert, ist es relevant, ob die Folge $\langle x_n \rangle$ sich dem Punkt x_0 von rechts oder von links nähert.



Links- und rechtsseitiger Grenzwert

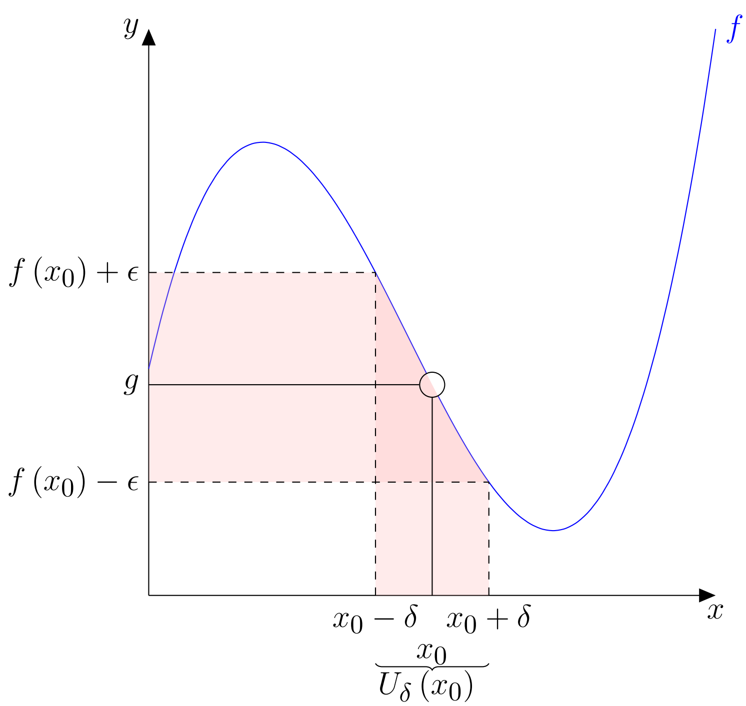
Eine Funktion f mit Definitionsbereich D_f hat in einem Punkt x_0 den **linksseitigen (rechtsseitigen) Grenzwert** g genau dann, wenn gilt:

1. $\exists \delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0) \subset D_f$ $(\exists \delta > 0 : \quad (x_0, x_0 + \delta) \subset D_f)$
2. Für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to x_0$, $x_n \in D_f$ und $x_n < x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$. (Für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to x_0$, $x_n \in D_f$ und $x_n > x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.)

In diesem Fall schreiben wir:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x_n) = g \quad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x_n) = g \right)$$

Äquivalente Definition des Grenzwertes



Eine Funktion f mit Definitionsbereich D_f hat in einem Punkt x_0 den Grenzwert g genau dann, wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$

1. $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subset D_f$
2. $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$

Rechenregeln für Grenzwerte
Es seien ein Punkt x_0 und Funktionen f_1 und f_2 mit $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1$ und $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2$ gegeben. Dann gelten:

- $\lim_{x \to x_0} (a \cdot f_1(x)) = a \circ g_1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = g_1 \pm g_2$
- $\lim_{x \to x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = g_1 \circ g_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = \frac{g_1}{g_2}$, falls $g_2 \neq 0$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x)^{f_2(x)} \right) = g_1^{g_2}$, falls
- $g_1 > 0$

3.2.2 Der Begriff der Stetigkeit

Wir können uns nun der letzten verbleibenden Frage widmen:

Stetigkeit

- Eine Funktion f ist stetig in einem Punkt x_0 genau dann, wenn gilt

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Eine Funktion f heißt linksseitig (rechtsseitig) stetig genau dann, wenn gilt

  $$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0)$$

- Eine Funktion f mit Definitionsbereich $(a; b)$ heißt stetig genau dann, wenn f stetig ist für jedes $x \in (a; b)$.
- Eine Funktion f mit Definitionsbereich $[a; b]$ heißt stetig genau dann, wenn f stetig ist für jedes $x \in (a; b)$, rechtsseitig stetig für $x = a$ und linksseitig stetig für $x = b$.

Aus den entsprechenden Aussagen über Grenzwerte ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften für stetige Funktionen: Es seien ein Punkt x_0 und in x_0 stetige Funktionen f_1 und f_2 gegeben. Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in x_0:

- $a \cdot f_1(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $f_1(x) \pm f_2(x)$
- $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ falls $f_2(x_0) \neq 0$
- $f_1(x) \cdot f_2(x)$
- $f_1(x)^{f_2(x)}$, falls $f_1(x_0) > 0$
- Ist eine weitere Funktion f_2 im Punkt $f_1(x_0)$ stetig, so ist auch $f_2(f_1(x))$ im Punkt x_0 stetig.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Zwischenwertsatz
Es sei eine stetige Funktion f gegeben, die auf dem Intervall $D_f = [a;b]$ definiert ist. Die Funktion f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an:

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)] \, (\text{bzw.} [f(b); f(a)]) \; : \; \exists c \in [a;b] \; : \; f(c) = \lambda$$

Insbesondere folgt daraus:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a;b] \; : \; f(c) = 0$$

Der Wertebereich $W_f = f([a;b])$ einer stetigen Funktion f ist wieder ein Intervall der Form $[A;B]$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Aussagen:

- Die Funktion f nimmt auf dem Intervall $[a;b]$ einen Maximal- und einen Minimalwert an:

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b] \; : \quad \forall x \in [a;b] \; : \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

- Ist die Funktion f streng monoton steigend (fallend), so ist der Wertebereich W_f das Intervall $[f(a); f(b)]$ ($[f(b); f(a)]$) und es existiert eine stetige Umkehrfunktion f^{-1}.

Wichtige stetige Funktionen

1. **Die Stetigkeit algebraischer Funktionen:** Die Funktion $f(x) = x$ ist offensichtlich stetig. Daraus lässt sich mit den bekannten Regeln für stetige Funktionen schließen:

   - Alle Potenzfunktionen $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ sind stetig.
   - Alle Polynome $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, n \in \mathbb{N}$ sind stetig.
   - Alle gebrochen-rationalen Funktionen sind stetig dort stetig, wo sie definiert sind.
   - Alle Wurzelfunktionen $f(x) = x^{1/n}, n \in \mathbb{N}$ sind stetig für $x \geq 0$.

2. e^x **ist stetig**: Wir verwenden die äquivalente Definition der Stetigkeit.

$$\forall \epsilon > 0 \; : \; \exists \delta > 0 \; : \quad 1. \; U_\delta(x_0) \subset D_f$$
$$2. \; x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

   Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Wir können $\epsilon < 1$ annehmen. Zu bestimmen ist δ mit den Eigenschaften 1. und 2.

   (a) Weil $D_{e^x} = \mathbb{R}$ ist, ist die erste Forderung für jedes δ erfüllt.

   (b) Setze nun $\delta = \min\left(\ln(1+\epsilon), \ln \dfrac{1}{1-\epsilon}\right)$. Es folgt:

$$x - x_0 \leq |x - x_0| < \delta \leq \ln(1+\epsilon) \quad \Rightarrow e^{x-x_0} < 1 + \epsilon \quad \Leftrightarrow e^{x-x_0} - 1 < \epsilon$$

$$x_0 - x \leq |x - x_0| < \delta \leq \ln \frac{1}{1-\epsilon} \quad \Rightarrow e^{x_0 - x} < \frac{1}{1-\epsilon} \quad \Leftrightarrow 1 - e^{x-x_0} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| e^{x-x_0} - 1 \right| < \epsilon$$

   und damit

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0} \left| e^{x-x_0} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Dies beweist, dass e^x stetig ist. Damit ist auch $\ln(x)$ als Umkehrfunktion von e^x stetig. Außerdem folgt daraus auch die Stetigkeit aller Funktionen der Form $f(x) = a^x, a > 0$ sowie $f(x) = \log_a(x), a > 0, a \neq 1$ in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

3. $\sin x$ **ist stetig:** Wir verfahren wie zuvor:

   (a) Weil $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ ist, ist die erste Forderung für jedes δ erfüllt.

   (b) Setze nun $\delta = \epsilon$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|\sin(x) - \sin(x_0)| &= \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \quad \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2} \quad \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&\leq |x-x_0| \quad < \epsilon
\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $\sin(x)$ stetig ist. Daraus folgt auch die Stetigkeit aller anderen Trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

- **Unstetigkeit 1.Art:**
  - Hebbare Unstetigkeit / Lücke: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \;\wedge\; g \neq f(x_0)$
  - Sprung: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = g^+ \;\wedge\; \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = g^- \;\wedge\; g^+ \neq g^-$
- **Unstetigkeit 2.Art**
  - Unendlichkeitsstelle: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty \;\vee\; \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$
  - $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ oder $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ existieren nicht (unbestimmte Divergenz bei x_0)

3.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Zahlenfolgen auf Monotonie. Beweisen Sie.

a) $\left\langle \frac{\sqrt{3n+1}}{n} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{2n}{(n+1)!} \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{n!}{2^n} \right\rangle$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Folgen $\langle a_n \rangle$.
Ab welchem Index n_0 gilt $|a_n| < \epsilon$ mit $\epsilon = 10^{-1}$ oder $\epsilon = 10^{-3}$?

a) $\left\langle \frac{(-1))^n}{4n+2} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{1}{10^{n-1}} \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{-1}{\sqrt{n+1}} \right\rangle$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die angegebenen Folgen Nullfolgen sind.

a) $\left\langle \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{2}{(-2)^n} \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{n}{3n+4} - \frac{1}{3} \right\rangle$

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Folgen $\langle a_n \rangle$ nicht gegen den angegebenen Wert a konvergieren. Wählen Sie dazu $\epsilon = \frac{1}{2}$ und zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \notin U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

a) $\left\langle \frac{3}{n+3} \right\rangle, \quad a = 1$ b) $\left\langle 1 - \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle, \quad a = 0$ c) $\left\langle \frac{3n}{n+1} \right\rangle, \quad a = 2$

Aufgabe 5

Gegeben sind die Folgen $\langle a_n \rangle$. Ab welchem Index n_0 gilt $a_n > K$ mit $K = 10$ oder $K = 10^3$?

a) $\langle 2^n + 1 \rangle$ b) $\left\langle n^3 - 7 \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{n^2 - 1}{n+1} \right\rangle$

Aufgabe 6

Welche der angegebenen Folgen $\langle a_n \rangle$ sind bestimmt, welche unbestimmt divergent? Falls eine Folge bestimmt konvergent ist, beweisen Sie dies.

a) $\left\langle \frac{1-n^2}{2n} \right\rangle$ b) $\left\langle (1 + (-1)^n) \left(2 + \frac{2}{n} \right) \right\rangle$ c) $\left\langle \sin \frac{n\pi}{2} \right\rangle$

Aufgabe 7

Gegeben ist die konvergente Folge $\langle a_n \rangle$. Bestimmen Sie den Grenzwert a von $\langle a_n \rangle$ und geben Sie ein $n_0(\epsilon)$ an, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ gilt für $n \geq n_0(\epsilon)$.

a) $\left\langle \frac{2n+2}{4n} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{2(n+1)}{7n-1} \right\rangle$ c) $\left\langle \left(-\frac{6}{7} \right)^n + 2 \right\rangle$

d) $\left\langle (1 + (-1)^n) \frac{2}{n} \right\rangle$ e) $\left\langle \frac{n^2 - 2}{n^2 \sqrt{n}} \right\rangle$ f) $\left\langle 1 - \sqrt[n]{10} \right\rangle$

Aufgabe 8

Berechnen Sie den Grenzwert der angegebenen Zahlenfolgen, falls er existiert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\left(n-\sqrt{n}\right)}{3n\sqrt{n}+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\sqrt[3]{n^2}-n^2}{n^2+2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{7n}\right)^2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+7n}{7n}\right)^n$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{n+1}{2-n}\right)^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n+n}{1-2n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}\sin\dfrac{3}{n}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin\dfrac{3}{n}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-4n}-3n\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}\cot\dfrac{3}{n}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\dfrac{2}{n}-n\cos\dfrac{3}{n}\right)$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{n}\left(1+\lg n\right)$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} \dfrac{9x^2-4}{3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{3\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$ c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{9\,(x-3)}{x^4-81}$ e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3-\sqrt{x^2+9}}$ h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 2x}{2x}$ i) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x-1)\,(x+2)}{(x+1)\,(x-2)}$

j) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x\cos x}{3x}$ k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\tan 5x}$ l) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2}{2+2^{\frac{1}{x}}}$

Aufgabe 10

Für welche Werte von x haben die folgenden Funktionen Unstetigkeitsstellen? Bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der Funktionen an diesen Stellen und die Art der Unstetigkeit.

Nutzen Sie einerseits die Nullfolge $x = \dfrac{1}{n}$, $n \to \infty$, für den Fall $x \to 0$ und andererseits die Substitution $x = a+h$, $h \to 0$, für den Fall $x \to a$.

a) $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$ b) $y = f(x) = \dfrac{2-x}{2-|x|}$ c) $y = f(x) = \dfrac{x^2-x}{|x-1|}$

d) $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2-\sqrt{2-x}}$ e) $y = f(x) = \dfrac{-2}{2+2^{\frac{1}{x}}}$ f) $y = f(x) = 2^{\frac{1}{1-x^2}}$

g) $y = f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}$ h) $y = f(x) = \dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1-2^{\frac{1}{x}}}$ i) $y = f(x) = 2xe^{\frac{1}{x-2}}$

j) $y = f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Kapitel 4

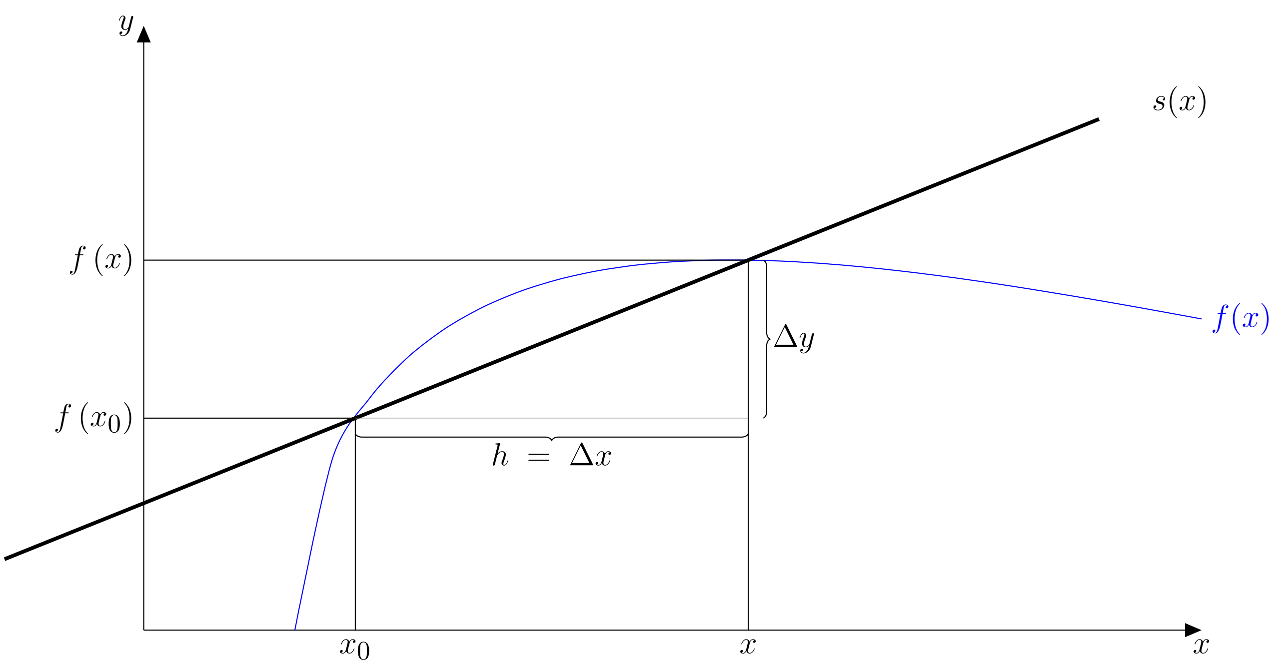
Differentialrechnung

4.1 Der Begriff der Differenzierbarkeit

Angenommen, eine Funktion $f(x)$ sei gegeben. Wir möchten wissen, wie steil die Funktion im Punkt x_0 ist. In einer Näherung wählen wir einen zweiten Punkt x und verbinden die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Damit erhalten wir eine Gerade

$$s(x) \;=\; m_s(x - x_0) + f(x_0),$$

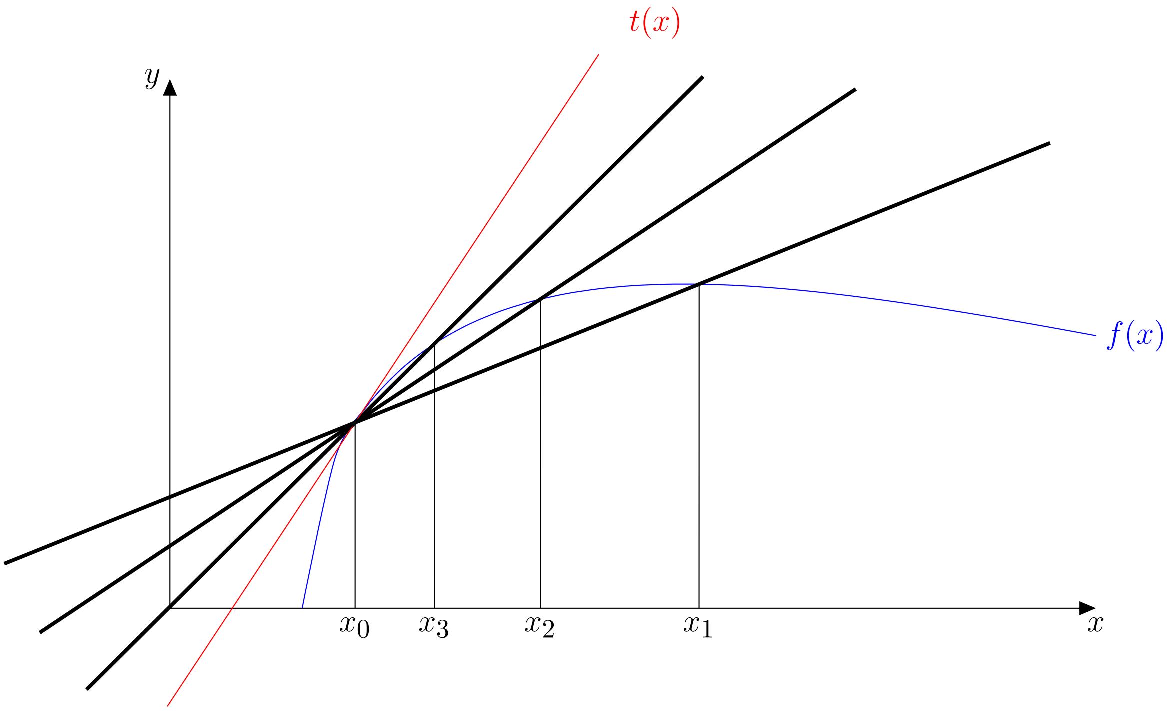
die an eine ähnliche Steigung hat wie f an der Stelle x_0 (**Sekante**).



Die Steigung der Sekante ist gegeben durch den **Differenzenquotienten**:

$$m_s \;=\; \tan\phi_s \;=\; \frac{\Delta y}{\Delta x} \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;=\; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diese Steigung ist aber nur eine sehr grobe Näherung für die Steigung von f in x_0. Je näher wir den Punkt x an x_0 heranrücken lassen, desto besser wird die Näherung:



Wir können also eine Folge $\langle x_n \rangle$ von x-Werten mit $x_n \to x_0$ betrachten. Je näher diese Folge dem Wert x_0 kommt, desto mehr nähern sich die Sekanten einer Geraden

$$t(x) = m_t (x - x_0) + f(x_0)$$

an, die die gleiche Steigung wie f in x_0 hat, der **Tangenten**. Damit dieser Prozess wohldefiniert ist, muss die Folge der Differenzenquotienten unabhängig von der Wahl der Folge $\langle x_n \rangle$ sein.

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist f an dieser Stelle auch stetig.

Differenzierbarkeit
Wir bezeichnen eine Funktion f als *differenzierbar in einem Punkt* x_0, falls f in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 definiert ist und der Differentialquotient

$$m_t = \tan \phi_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.
Ist f differenzierbar in x_0, so bezeichnen wir den Wert des Differentialkoeffizienten als die **Ableitung** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) \equiv \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ist f für alle $x \in D_f$ differenzierbar, so bezeichnen wir f als differenzierbar.

Beispiel: Wir wollen die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle x_0 berechnen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2+3-(x_0^2+3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2+2\Delta x\, x_0+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} 2x_0+\Delta x = 2x_0. \end{aligned}$$

Die Ableitung $f'(x)$ an einer beliebigen Stelle x ist wieder eine Funktion. Falls wir diese nochmals differenzieren können, sprechen wir von der zweiten Ableitung:

$$f''(x_0) = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=x_0} := \left.\frac{df'}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Falls wir diesen Prozess fortsetzen können, erhalten wir die n-te Ableitung:

$$f'^{(n)}(x_0) = \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=x_0} := \left.\frac{df^{(n-1)}}{dx}\right|_{x=x_0}$$

4.2 Ableitungsregeln

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgen wichtige Regeln für die Ableitung von Funktionen: Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei in x_0 differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- **Ableitung einer Summe/Differenz:** Es sei $h(x) = f(x) \pm g(x)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

- **Ableitung eines Produktes:** Es sei $h(x) = f(x)g(x)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x_0+\Delta x)\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]+f(x_0)\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(g(x_0+\Delta x) \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \quad \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right) \\ &= g(x_0)\, f'(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus:

$$\left.\frac{d(af)}{dx}\right|_{x=x_0} = af'(x_0)$$

- **Ableitung des Inversen:** Es sei $f(x_0) \neq 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{f(x_0+\Delta x)\ f(x_0)} \ \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \\
&= -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}
\end{aligned}$$

- **Ableitung eines Quotienten:** Es sei $g(x_0) \neq 0$ und $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \, \frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \, \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\
&= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

- **Ableitung einer verketteten Funktion:** Es sei $m(x)$ eine im Punkt $f(x_0)$ differenzierbare Funktion. Dann gilt für die Funktion $h(x) = m(f(x))$:

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(f(x_0+\Delta x)) - m(f(x_0))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{m(f(x_0+\Delta x)) - m(f(x_0))}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \\
&= m'(f(x_0))\, f'(x_0)
\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ aufgrund der Stetigkeit von f eine Nullfolge ist.

- **Ableitung der Umkehrfunktion:** Es sei $f(x)$ eine invertierbare und differenzierbare Funktion. Dann gilt für die Funktion für die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$:

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)(y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0)+\Delta y) - f(x_0)}{f\left(f^{-1}(f(x_0)+\Delta y)\right) - f(x_0)}
\end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass wegen der Stetigkeit von f^{-1} an der Stelle y_0 gilt:

$$\lim_{\Delta y \to 0} f^{-1}(f(x_0)+\Delta y) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$$

so folgt

$$\left(f^{-1}\right)(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

4.3 Die Ableitung einiger wichtiger Funktionen

4.3.1 Die Ableitung von algebraischen Funktionen

- $\boxed{(x^n)' = n \circ x^{n-1}, \;\; n \in \mathbb{N}}$ Der Beweis er folgt durch vollständige Induktion:

  Induktionsanfang: Es sei $n = 1$. Wir betrachten also $f(x) = x$.

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1 = 1 \cdot x^0.$$

  Induktionsschritt: Die Beziehung gelte für $n-1$, d.h.

$$\left(x^{n-1}\right)' = (n-1) \cdot x^{n-2}$$

  Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left(x^n x^{n-1}\right)' &= \left(x \cdot x^{n-1}\right)' \\ &= \left(x x^{n-1}\right)' \cdot x^{n-1} + x \cdot \left(x^{n-1}\right)' \\ &= x^{n-1} + (n-1) \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

- $\boxed{\left(x^{-n}\right)' = (-n) \cdot x^{-n-1}, \;\; n \in \mathbb{N}}$

  Der Beweis erfolgt durch die üblichen Ableitungsregeln:

$$\left(x^{-n} \frac{1}{x^n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = (-n) \cdot x^{-n-1}.$$

- $\boxed{\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n-1}, \;\; n \in \mathbb{Z}}$

  Wir nutzen die Beziehung für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{\left(y^n\right)' \left(y = x^{1/n}\right)} = \frac{1}{n \circ \left(x^{1/n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \circ x^{1/n-1}$$

- $\boxed{\left(x^{m/n}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{m/n-1}, \;\; m, n \in \mathbb{Z}}$

  Wir nutzen die Beziehung für die Ableitung einer verketteten Funktion:

$$\left(x^{m/n}\right)' = \left((x^m)^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} \circ (x^m)^{1/n-1} \circ m \circ x^{m-1} = \frac{m}{n} \circ x^{m/n-1}$$

4.3.2 Die Ableitung von transzendenten Funktionen

- $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

Der Beweis erfolgt direkt über den Differentialquotienten:

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} = \ln\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich:

- $\boxed{(e^x)' = e^x}$

  Wir verwenden die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

  $$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'\,(y = e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

- $\boxed{\left(x^t\right)' = t \cdot x^{t-1}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+}$

  Im Bereich $x > 0$ gilt:

  $$\left(x^t\right)' = \left(e^{t \ln x}\right)' = \frac{t}{x} \cdot e^{t \ln x} = t \cdot x^{t-1}.$$

- Die **hyperbolischen Funktionen** sind durch die Beziehungen

  $$
  \begin{aligned}
  \cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cos(ix) & \sinh x &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -i \sin(ix) \\
  \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}
  \end{aligned}
  $$

  definiert. Die Umkehrfunktionen dieser Funktionen werden als $\operatorname{arccosh} x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arctanh} x$ und $\operatorname{arccoth} x$ bezeichnet. Wichtige Beziehungen zwischen diesen sind

  $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

  $$
  \begin{aligned}
  1 - \tanh^2(x) &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \\
  1 - \coth^2(x) &= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}
  \end{aligned}
  $$

  Damit ergeben sich die Ableitungsregeln

  $$
  \begin{aligned}
  (\cosh(x))' &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x \\
  (\sinh(x))' &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x \\
  (\tanh(x))' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \\
  (\coth(x))' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x
  \end{aligned}
  $$

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arccosh}(x))' &= \frac{1}{\big(\cosh(y)\big)'(y = \operatorname{arccosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh} x)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(\operatorname{arccosh} x) - 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
(\operatorname{arcsinh}(x))' &= \frac{1}{\big(\sinh(y)\big)'(y = \operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} \\
&= \frac{1}{\sinh^2(\operatorname{arcsinh} x) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
(\operatorname{arctanh}(x))' &= \frac{1}{\big(\tanh(y)\big)'(y = \operatorname{arctanh} x)} = \frac{1}{1-\tanh^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1-x^2} \\
(\operatorname{arccoth}(x))' &= \frac{1}{\big(\coth(y)\big)'(y = \operatorname{arccoth} x)} \\
&= \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

4.3.3 Die Ableitung trigonometrischer Funktionen

- $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ Der Differentialquotient lautet:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin(x)\ \cos(\Delta x) + \cos(x)\ \sin(\Delta x)) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\ (\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x)\ \sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin(x)\ (\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(x)\ \sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \sin(x) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right) + \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x).
\end{aligned}$$

Damit folgt

- $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Aus $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ und $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ folgt:

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x$$

- $\boxed{(\tan x)' \;=\; \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

  Mit der Quotientenregel folgt

$$(\tan x)' \;=\; \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \;=\; \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \;=\; \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- $\boxed{(\cot x)' \;=\; \dfrac{1}{\cot^2 x}}$

  Mit der Quotientenregel folgt

$$(\cot x)' \;=\; \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \;=\; \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- $\boxed{(\arcsin x)' \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;\;,\;\; (\arccos x)' \;=\; -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

  Mit der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen folgt

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' \;&=\; \frac{1}{\big(\sin y\big)'\,(y \;=\; \arcsin x)} \;=\; \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

  Der Beweis der zweiten Beziehung erfolgt analog.

- $\boxed{(\arctan x)' \;=\; \dfrac{1}{1-x^2} \;\;,\;\; (\operatorname{arccot} x)' \;=\; -\dfrac{1}{1-x^2}}$

  Mit der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen und der Beziehung $1/\cos^2 x \;=\; 1+\tan^2 x$ folgt

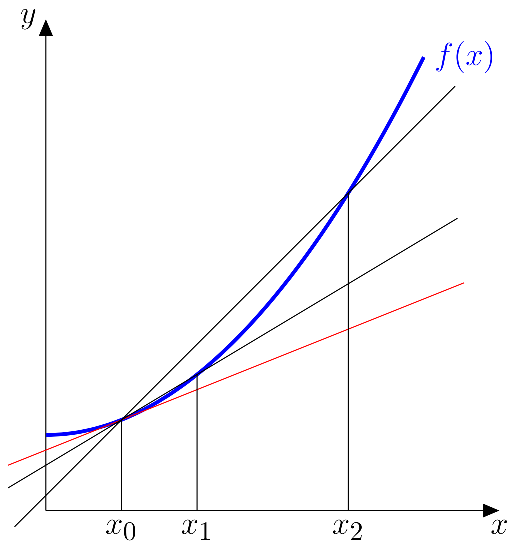
$$\begin{aligned}(\arctan x)' \;&=\; \frac{1}{\big(\tan y\big)'\,(y \;=\; \arctan x)} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &=\; \frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan x\right)} \;=\; \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

  Der Beweis der zweiten Beziehung erfolgt analog.

4.4 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

4.4.1 Das Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

Es sei I ein offenes oder abgeschlossenes Intervall. f sei eine Funktion, die differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $I \subset U$ ist. f sei monoton in einem Intervall I. Sei $x_0 \in I$ beliebig. Welche Folgen hat dies für die Ableitung $f'(x_0)$?



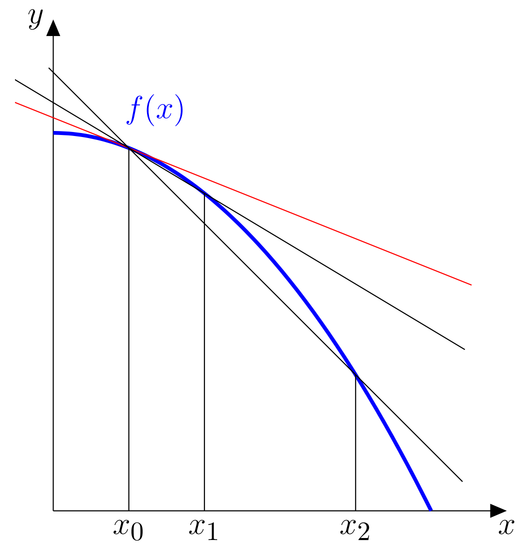
Die Funktion ist monoton steigend.

$\Rightarrow$ Die Steigung der Sekanten ist nicht-negativ:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ Die Steigung der Tangente ist nicht-negativ:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$



Die Funktion ist monoton fallend.

$\Rightarrow$ Die Steigung der Sekanten ist nicht-positiv:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$\Rightarrow$ Die Steigung der Tangente ist nicht-positiv: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

Ist andererseits die Ableitung von f positiv im Intervall I, so ist f streng monoton steigend auf I. Ist die Ableitung von f negativ im Intervall I, so ist f streng monoton fallend auf I.

Differenzierbarkeit

- Eine Funktion f sei differenzierbar auf einem Intervall I.

  f ist monoton steigend auf I. $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) \geq 0 \ \forall x_0 \in I$.

  f ist monoton fallend auf I. $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) \leq 0 \ \forall x_0 \in I$.

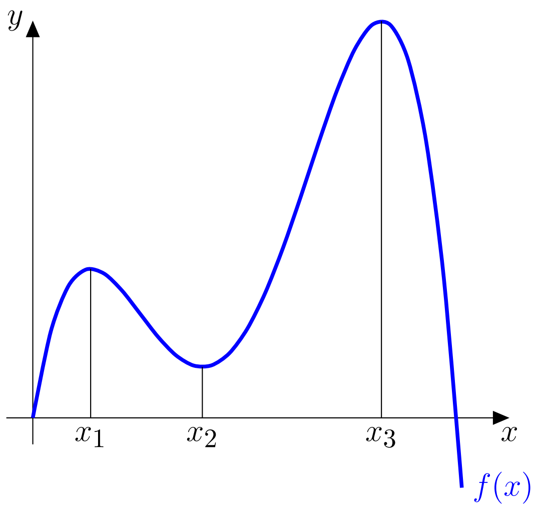
- Ist $I = [a;b]$ und f stetig auf $[a;b]$ und differenzierbar auf $]a;b[$, so gilt außerdem:

  f ist auf $[a;b]$ streng monoton steigend. $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) > 0 \ \forall x_0 \in]a;b[$.

  f ist auf $[a;b]$ streng monoton fallend. $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) < 0 \ \forall x_0 \in]a;b[$.

4.4.2 Extremwerte differenzierbarer Funktionen

[



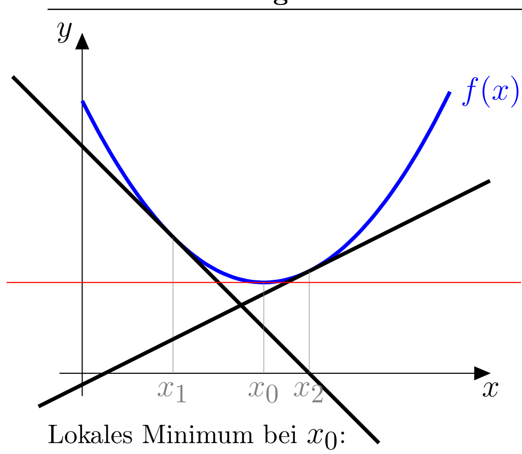
Die Extrema der Funktion f sind:

- x_1: lokales Maximum
- x_2: lokales Minimum
- x_3: globales Maximum

Lokale und globale Extremwerte

Relatives/Lokales Maximum:	$\exists U_\sigma(x_0) \;:\; \forall x \in U_\sigma(x_0) \cap D_f \;:\; f(x) \leq f(x_0)$
Globales Maximum:	$\forall x \in D_f \;:\; f(x) \leq f(x_0)$
Relatives/Lokales Minimum:	$\exists U_\sigma(x_0) \;:\; \forall x \in U_\sigma(x_0) \cap D_f \;:\; f(x) \geq f(x_0)$
Globales Minimum:	$\forall x \in D_f \;:\; f(x) \leq f(x_0)$

Charakterisierung lokaler Extremwerte:

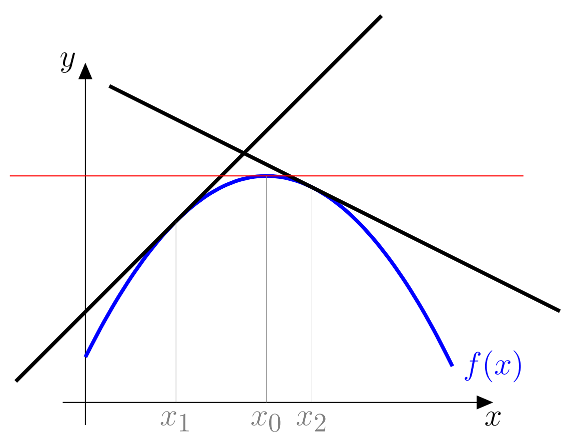


Lokales Minimum bei x_0:

$$f'(x_1) < 0$$

$$f'(x_2) > 0$$

$$f'(x_0) = 0$$



Lokales Maximum bei x_0:

$$f'(x_1) < 0$$

$$f'(x_2) < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

Wir betrachten eine differenzierbare Funktion f.

- Ist x_0 ein lokales Minimum, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Funktion f auf dem Intervall $[x_0 - \delta; x_0]$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $[x_0; x_0 + \delta]$ streng monoton steigend ist. Daher ist

$$f'(x) \leq 0 \text{ für } x \in [x_0 - \delta; x_0] \qquad f'(x) \geq 0 \text{ für } x \in [x_0; x_0 + \delta; x] \,.$$

  . Insbesondere folgt daraus $f'(x_0) = 0$.

- Ist x_0 ein lokales Maximum, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Funktion f auf dem Intervall $[x_0 - \delta; x_0]$ streng monoton steigend und auf dem Intervall $[x_0; x_0 + \delta]$ streng monoton fallend ist. Daher ist

$$f'(x) \geq 0 \text{ für } x \in [x_0 - \delta; x_0] \qquad f'(x) \leq 0 \text{ für } x \in [x_0; x_0 + \delta; x]$$

  ist. Insbesondere folgt daraus $f'(x_0) = 0$.

Bedingungen für lokale Extrema
Eine Funktion f sei differenzierbar auf einem Intervall I.

- **Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:** $f'(x_0) = 0$
- **Notwendige und hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum:**

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } \exists U_\sigma(x_0) : \begin{cases} f'(x) > 0, & x \in U_\sigma(x_0) \wedge x < x_0 \\ f'(x) < 0, & x \in U_\sigma(x_0) \wedge x > x_0. \end{cases}$$

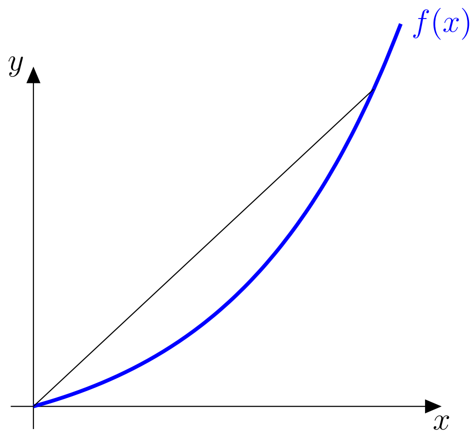
- **Notwendige und hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum:**

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } \exists U_\sigma(x_0) : \begin{cases} f'(x) > 0, & x \in U_\sigma(x_0) \wedge x < x_0 \\ f'(x) < 0, & x \in U_\sigma(x_0) \wedge x > x_0. \end{cases}$$

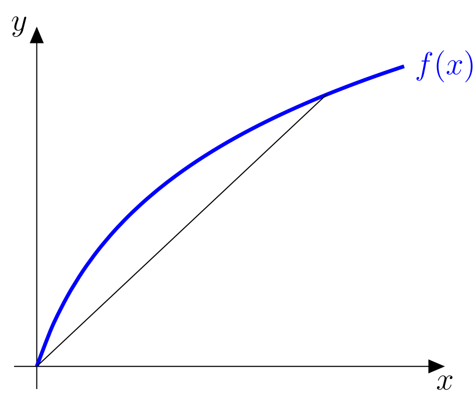
4.4.3 Wendepunkte differenzierbarer Funktionen

Konkave und Konvexe Funktionen:

Wir nehmen an, die Funktion f sei auf dem Intervall I zweimal stetig differenzierbar.



Konvex/ Linksgekrümmt: Der Graph von f liegt immer unter der Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte auf dem Graphen.



Konkav/Rechtsgekrümmt: Der Graph von f liegt immer über der Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte auf dem Graphen.

Für konvexe Funktionen werden die Tangenten an der Kurve mit steigenden x-Werte immer steiler, für konkave Funktionen werden sie immer flacher.

- f ist auf $[a;b]$ (streng) konvex $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist auf $[a;b]$ (streng) monoton steigend $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a;b[: \; f''(x) \geq 0 \; \left(f''(x) > 0\right)$
- f ist auf $[a;b]$ (streng) konkav $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist auf $[a;b]$ (streng) monoton fallend $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a;b[: \; f''(x) \leq 0 \left(f''(x) < 0\right)$

Wir definieren die folgenden Begriffe, wobei f zweimal differenzierbar sein soll:

- **Wendepunkt** x_0 der Funktion f: f hat an der Stelle x_0 einen Übergang konvex-konkav oder konkav-konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ wechselt das Vorzeichen in x_0.
- **Sattelpunkt**/ **Terassenpunkt** x_0 der Funktion f: f hat an der Stelle x_0 Wendepunkt und die Tangente im Wendepunkt (**Wendetangente**) ist waagerecht. $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ wechselt das Vorzeichen in x_0.

4.4.4 Alternative Charakterisierung von Extremwerten und Wendepunkten

Wir betrachten eine n-mal differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $]a;b[$ an einer Stelle x_0 mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gelten die folgenden hinreichenden Bedingungen:

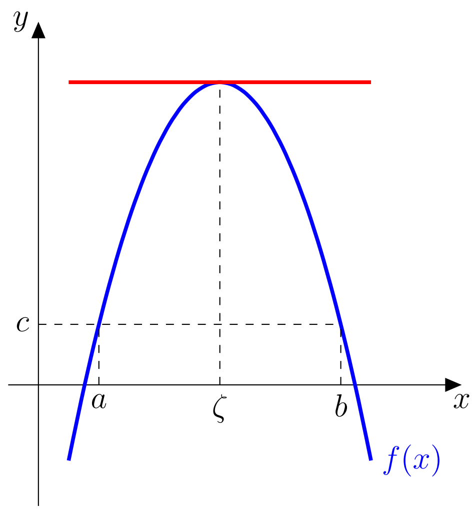
- n ist ungerade
  - $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in x_0 ein lokales Maximum
  - $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in x_0 ein lokales Minimum
- n ist gerade $\quad \Rightarrow \quad f$ hat in x_0 einen Sattelpunkt

4.5 Der Satz von Rolle und die Mittelwertsätze

4.5.1 Der Satz von Rolle

Satz von Rolle
Wir betrachten eine differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$. Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a;b]$ stetig und auf dem Intervall $]a;b[$ differenzierbar. Dann gilt

$$f(a) = f(b) = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \exists \zeta \in]a;b[: \; f'(\zeta) = 0.$$



Beweis: Weil $f(x)$ stetig ist, nimmt f auf dem Intervall $[a;b]$ ein Minimum f_{min} und ein Maximum f_{max} an.

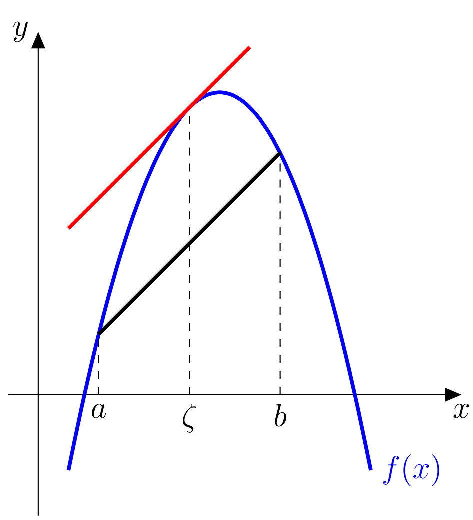
- Falls $f_{\text{min}} = f_{\text{max}} = c$ gilt, ist $f(x) = c$ auf dem Intervall $[a;b]$ und daher gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a;b[$.
- Falls $f_{\text{max}} \neq c$ gilt, gibt es ein $\zeta \in]a;b[$ mit $f(\zeta) = f_{\text{max}}$. Bei einem Maximum folgt aber $f'(\zeta) = 0$.
- Falls $f_{\text{min}} \neq c$ gilt, gibt es ein $\zeta \in]a;b[$ mit $f(\zeta) = f_{\text{min}}$. Bei einem Minimum folgt aber $f'(\zeta) = 0$.

4.5.2 Der Mittelwertsatz

Mittelwertsatz
Wir betrachten eine differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$. Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a;b]$ stetig und auf dem Intervall $]a;b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\zeta \in]a;b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

Es gibt also zu jeder Sekante an der Funktion f eine Tangente an f mit derselben Steigung.



Beweis: Für die Funktion

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

gilt:

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Damit folgt aus dem Satz von Rolle, dass es ein $\zeta \in]a;b[$ gibt mit

$$g'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

4.5.3 Der erweiterte Mittelwertsatz

Erweiterter Mittelwertsatz
Wir betrachten differenzierbare Funktionen f und g auf einem Intervall $[a;b]$. Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall $[a;b]$ stetig und auf dem Intervall $]a;b[$ differenzierbar. Außerdem sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a;b[$. Dann gibt es ein $\zeta \in]a;b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Beweis: Zunächst folgt aus dem Mittelwertsatz und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a;b[$, dass $g(a) \neq g(b)$.
Für die Funktion

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a))$$

gilt $h(a) = h(b) = 0$. Damit folgt aus dem Satz von Rolle, dass es ein $\zeta \in]a;b[$ gibt mit

$$h'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(\zeta) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

4.6 Die Regel von L'Hospital

Regel von L'Hospital
Es seien f und g zwei in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f'(x)/g'(x)\right)$ existiert, folgt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis: Es sei $\langle x_n \rangle$ eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $z_n \in\ ]x_n;x_0[$ bzw. $z_n \in\ ]x_0;x_n[$ mit

$$\frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Es gilt offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Daher folgt aus der Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f'(x)/g'(x)\right)$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Folgerungen:

- Ist $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Umformungen: Andere unbestimmte Ausdrücke lassen sich auf die genannten Formen zurückführen:

- Ist $f(x_0) = 0$ und $= g(x_0) = \infty$, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \circ g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}.$$

- Ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-f(x)}{f(x)\circ g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)-f'(x)}{(f(x)\circ g(x))'}.$$

- Ist

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

so gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)\cdot g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{(\ln f(x))'\cdot g'(x)}.$$

4.7 Vollständige Kurvendiskussion

Zu einer vollständigen Kurvendiskussion für die Funktion f gehört die Bestimmung der folgenden Eigenschaften einer Funktion:

1. **Definitionsbereich D_f der Funktion f.**
2. **Symmetrie und Periodizität von f.** Zu prüfen ist, ob die Funktion eine gerade oder ungerade Symmetrie besitzt und ob sie periodisch ist
3. **Verhalten der Funktion im Unendlichen.** Die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ und die Asymptote(n) der Funktion sind zu bestimmen.
4. **Stetigkeit der Funktion.** Es ist zu prüfen, ob die Funktion stetig ist, eventuelle Unstetigkeitsstellen (und Definitionslücken) sind zu ermitteln
5. **Schnittpunkte der Funktion mit den Koordinatenachsen und Polstellen.** Falls es Polstellen gibt, ist die Art der Polstelle und das Verhalten der Funktion nahe der Polstelle zu bestimmen
6. **Differenzierbarkeit der Funktion, erste und zweiten Ableitung.**
7. **Koordinaten und Art der Extrempunkte.** Es ist zu prüfen, ob die Extrempunkte Minima oder Maxima sind und ob es sich um lokale oder globale Extrempunkte handelt
8. **Koordinaten und Art der Extrempunkte sowie die Wendetangente.**
9. **Skizze des Funktionsgraphen.**

Beispiel: $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+1}$

1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. Die Funktion hat weder gerade noch ungerade Symmetrie und ist nicht periodisch.
3. Die Funktion f ist unecht gebrochen-rational. Daher wird zunächst die Polynomdivision durchgeführt.

$$\begin{array}{l} (-x^2+2x-1) : (x+1) = -x+3+\dfrac{-4}{x+1} \\ \underline{\;\;x^2\;\;+x\;\;} \\ \qquad 3x-1 \\ \qquad \underline{-3x-3} \\ \qquad\quad -4 \end{array}$$

Damit ergibt sich die Asymptote: $y_A = -x+3$.
Das Verhalten für $x \to \infty$ ist damit gegeben durch: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \mp\infty$.

4. Als gebrochen-rationale Funktion ist f im gesamten Definitionsbereich stetig (es gibt eine Definitionslücke bei $x = 1$).
5. Zähler und Nenner der Funktion werden getrennt untersucht:

$$\left.\begin{array}{lll} z(x) = -x^2+2x-1 = -(x-1)^2 & \Rightarrow & x_{z,0} = 1 \\ n(x) = x+1 & \Rightarrow & x_{n,0} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{Nullstelle:} & x_N = 1 \\ \text{Polstelle:} & x_P = -1 \\ \text{Lücke:} & \text{keine} \end{array}$$

Damit lautet der Schnittpunkt mit der x-Achse $(1/0)$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0/-1)$.

6. Die Funktion $f(x)$ ist als gebrochen-rationale Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar:

$$f(x) = -x+3-\frac{4}{x+1}$$

$$f'(x) = -1+\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

7. Die Nullstelle der 1. Ableitung ergibt sich mit

$$0 = f'(x) = -1+\frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow 4 = (x+1)^2 \Rightarrow x_{E,1} = -3 \;,\; x_{E,2} = 1$$

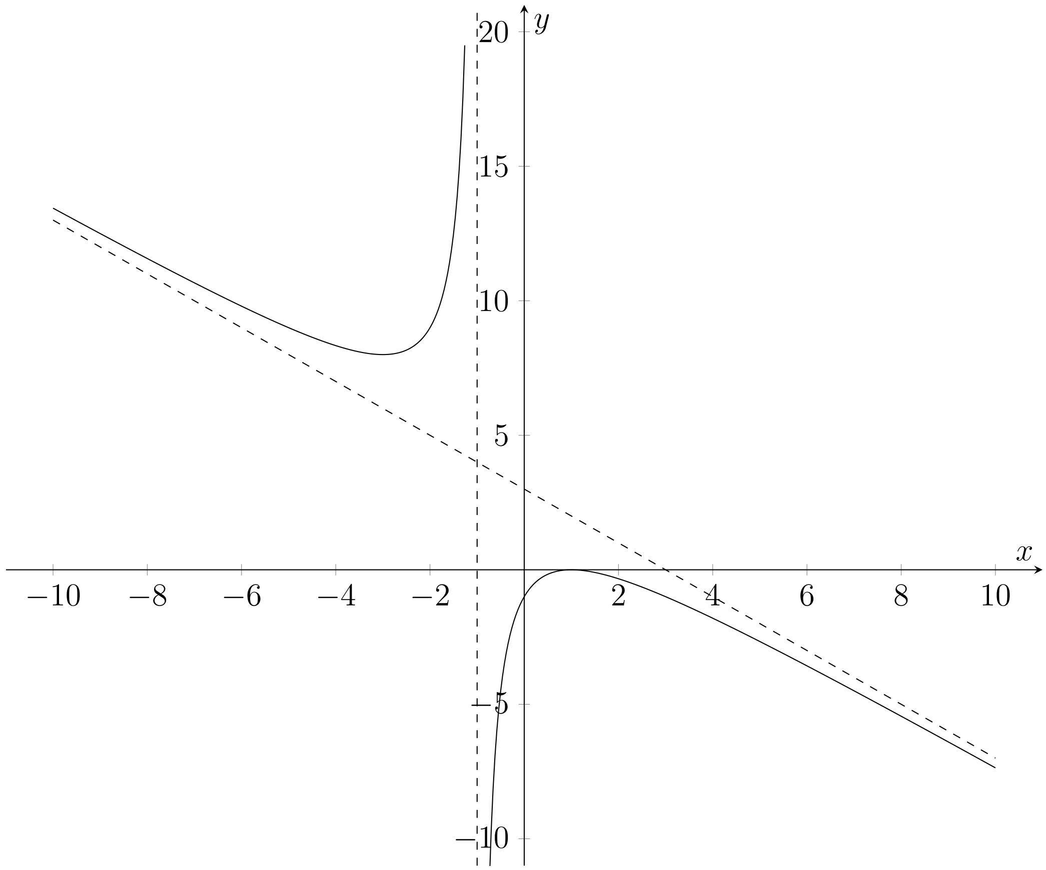
Nun kann mit Hilfe der 2.Ableitung die Art der Extremstellen untersucht werden:

$$f''\left(x_{E,1}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei:}(-3/f(-3)) = (-3/8)$$

$$f''\left(x_{E,2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei:}(1/f(1)) = (1/0)$$

8. $f''(x)$ hat keine Nullstellen. Daher gibt es keine Wendepunkte.

9. Funktionsgraph:



4.8 Aufgaben

Aufgabe 1

Bilden Sie mit Hilfe der Definition des Differentialquotienten die 1.Ableitung der folgenden Funktionen an der Stelle x_0!

a) $y = f(x) = 1 - x^3$

b) $y = f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

c) $y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$

d) $y = f(x) = \sqrt{1-2x}$

e) $y = f(x) = \ln(1-x)$

f) $y = f(x) = \sin(2x)$

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Funktionen $y = f(x)$. Bilden Sie $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ und $y''' = f'''(x)$ und fassen Sie sinnvoll zusammen. Schließen Sie diejenigen Werte für x aus, für die keine Ableitung existiert.

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{x}$

b) $y = f(x) = x^3 + \sqrt[n]{3}x^2$

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x+2}$

d) $y = f(x) = \left(2x - \dfrac{2}{x}\right)^3$

e) $y = f(x) = \dfrac{9x^2-5}{3x+2}$

f) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{3x}}$

g) $y = f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

h) $y = f(x) = \sin^2 2x$

i) $y = f(x) = \sqrt{\sin x}$

j) $y = f(x) = e^{x-1} - e^{2x}$

k) $y = f(x) = \dfrac{2x+4}{e^{2x}}$

l) $y = f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)e^x$

m) $y = f(x) = \dfrac{1}{4}(x-4)^2 e^x$

n) $y = f(x) = 6\ln\sqrt{x^2+1}$

o) $y = f(x) = e^{-x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

p) $y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

q) $y = f(x) = \arcsin\dfrac{2-x}{2}$

r) $y = f(x) = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

s) $y = f(x) = \ln\ln 2x$

t) $y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

u) $y = f(x) = \ln|2x|$

v) $y = f(x) = e^{|x|}$

Aufgabe 3

Differenzieren Sie die angegebenen Funktionen durch ein geeignetes Verfahren.

a) $y = f(x) = x^x \ln x$

b) $y = f(x) = x^{x \sin(x)}$

c) $y = f(x) = (\ln x)^x$

d) $y = f(x) = \sin^{1/x} x$

e) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 9 + x \,,\; y \geq 0$

f) $x^2 - y^2 = 9 + 4x - 6y \,,\; y \geq 0$

g) $x \sin y = 2x - 1$

h) $1 + x\, e^y = x^2$

Aufgabe 4

Bilden Sie, falls möglich, die Ableitung der Umkehrfunktionen der Funktionen aus Aufgabe 2a),2c),2n) und 2q) im Punkt $P_0(2/y_0)$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^5-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x^2}{x^2 - \sin x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{\cos x - 1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-a}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{x-a}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x-a}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos(2x))}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+1-\cos x}{x^2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+1-\cos x}{x^2}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(1-x)}\right)$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die Funktion $y = f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ im Intervall $[0; 2\pi]$ absolute Extremwerte hat.

Aufgabe 7

Welchen Winkel bildet die Tangente in den Punkten $P_0(x_0/y_0)$ an die Kurve der folgenden Funktionen aus Aufgabe 2?

a) $y = f(x) = \left(2x - \dfrac{2}{x}\right)^3,\ x_0 = 1,\ x_0 = -1$

b) $y = f(x) = 2\sin x + \sin 2x,\ x_0 = 0,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3},\ x_0 = \pi$

c) $y = f(x) = \dfrac{2x+4}{e^{2x}},\ x_0 = 0$

d) $y = f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)\,e^x,\ x_0 = 0$

e) $y = f(x) = e^{-x^n},\ \ n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 = 0$

f) $y = f(x) = \arcsin\dfrac{2-x}{2},\ x_0 = 3$

g) $y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x_0 = \sqrt{2}$

h) $y = f(x) = \ln|2x|\,,\ x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Aufgabe 8

In welchen Kurvenpunkten schneiden die Tangenten an die Kurven der folgenden Funktionen aus Aufgabe 2 die x-Achse unter dem Winkel α ?

a) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{3x}},\ \alpha = 45^\circ$

b) $y = f(x) = \sin^2 2x\,,\ \alpha = 120^\circ$

c) $y = f(x) = 6\ln\sqrt{x^2+1}\,,\ \alpha = 60^\circ$

d) $y = f(x) = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}\,,\ \alpha = 0^\circ$

Aufgabe 9

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch.

a) $y = f(x) = x^2(x-2)$

b) $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

c) $y = f(x) = \dfrac{4x^2-9}{3x^2-3}$

d) $y = f(x) = \dfrac{x^2-7x+6}{2x+2}$

e) $y = f(x) = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{27}{8}$

f) $y = f(x) = \left(2x - \dfrac{2}{x}\right)^3$

g) $y = f_c(x) = \dfrac{x-c}{c}\sqrt{x},\ c > 0$

h) $y = f_c(x) = \dfrac{x\sqrt{x+c}}{c},\ c > 0$

i) $y = f_c(x) = \dfrac{x-c}{c}\,e^x,\ c > 0$

j) $y = f_c(x) = \dfrac{(x-c)^2}{c}\,e^x,\ c > 0$

k) $y = f_n(x) = e^{-x^n} \; n \in \{2;3\}$

l) $y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

m) $y = f(x) = \dfrac{x+2}{e^{2x}}$

n) $y = f(x) = c\,e^x - 2e^x \; c > 0$

o) $y = f_n(x) = 2x^n\,e^x \; n \in \{1;2\}$

p) $y = f_c(x) = c\ln\sqrt{x^2+1},\; c > 0$

q) $y = f(x) = \sin^2(2x)$

r) $y = f(x) = \sqrt{\sin x}$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in den Wendepunkten der folgenden Funktionen aus Aufgabe 9.

a) $y = f(x) = x^2(x-2)$

b) $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

c) $y = f(x) = \dfrac{x+2}{e^{2x}}$

d) $y = f_c(x) = c\ln\sqrt{x^2+1},\; c > 0$

Aufgabe 11

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat bei $x_n = -1$ eine Nullstelle und durchläuft dort seinen Wendepunkt mit der Steigung $m = 1$. Gesucht ist die Gleichung der Funktion.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten der Funktion als Matrizengleichung auf.

b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Rangkriteriums.

c) Geben Sie eine Gleichung für eine Funktion an, die den genannten Voraussetzungen genügt.

Aufgabe 12

Zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $y = f(x) = e^{-x^2}$ soll ein Rechteck mit möglichst großen Flächeninhalt einbeschrieben werden.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks sowie die Maßzahl für den Flächeninhalt.

Aufgabe 13

Beim Bau der folgenden Tunnel soll der Querschnitt der Durchfahrt möglichst groß sein.

a) Wie lang müssen die Rechteckseiten des in Bild 1a einbeschriebenen Rechtecks sein?

b) Der Umfang U des Querschnitts der Tunnelwand sei nun fest vorgegeben. Wie groß muss der Halbkreisradius sein, damit der Tunnelquerschnitt das maximale Volumen hat?

Aufgabe 14

Ein an einer Straße gelegenes Grundstück hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Seitenlängen $l = 60\,m$ und $b = 20\sqrt{3}\,m$. Auf dem Grundstück soll ein Haus mit möglichst großer Grundfläche errichtet werden.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Welche Abmessungen (Länge und Breite) muss das Haus haben?

Aufgabe 15

Aus einem quadratischen Stück Blech mit einer Seitenlänge von $a = 2\,m$ soll ein oben offener Kasten mit möglichst großem Volumen hergestellt werden. Zu diesem Zweck müssen an den Ecken des Blechs Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten werden.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Wie lang muss x sein?

c) Berechnen Sie auch das maximale Volumen.

Aufgabe 16

Ein Zelt hat einen rechteckigen Grundriss mit der Breite $\frac{3}{2}a$ und der Länge b. Es ist vollständig geschlossen und hat einen Boden. Das Volumen des Zelts beträgt $V = 4,5m^3$. Die Front besteht ebenso wie die Rückseite aus einem gleichschenkligen Dreieck der Höhe a.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Bestimmen Sie a und b so, dass der Materialverbrauch an Stoff für die Zeltwände möglichst gering ist.

c) Wie viel Material für die Oberfläche wird in diesem Fall benötigt (ini m^2)?

Aufgabe 17

Ein in ebenem Gelände liegender Park wird durch zwei geradlinig verlaufende Straßen und eine Bahnlinie begrenzt. Die erste Straße verläuft auf der x-Achse. Die zweite Straße kreuzt die Bahnlinie im Punkt $S(4,5/4)$ rechtwinklig und schneidet die erste Straße im Punkt $P(6,5/0)$. Die Bahnlinie wird durch eine Gleichung der Form $x = f(x) = \sqrt{a\,x+b}$ beschrieben.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen, die den Verlauf der zweiten Straße und der Bahnlinie beschreiben.

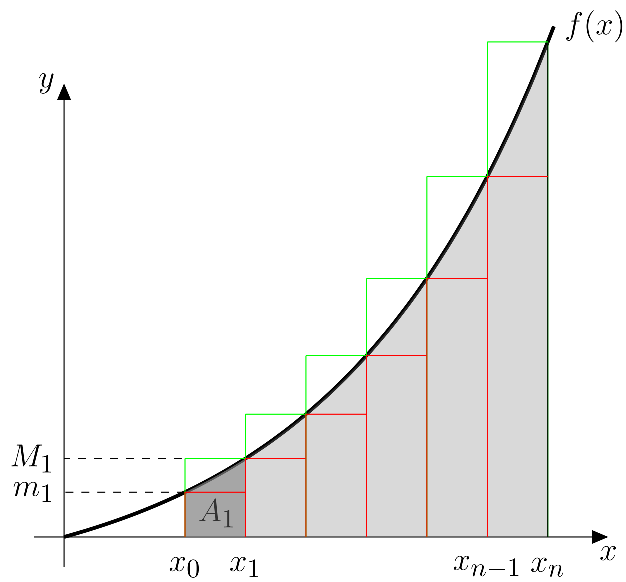
c) die Bahnlinie erhält einen Haltepunkt B, dessen Entfernung zum Punkt $A(4/0)$ minimal sein soll. Berechnen sie diese Entfernung.

Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 Die Fläche unter einer Kurve

Wir wollen die Fläche A unter einer durch die Funktion $f(x)$ gegebenen Kurve in einem Intervall $[a;b]$ bestimmen. Ohne den Begriff des Integrals ist die Bestimmung von Flächeninhalten nur für durch Geraden begrenzte Flächen in elementarer Form möglich. Wir bestimmen die Fläche A, indem wir sie mit Hilfe von Rechtecken möglichst genau annähern.



Wir teilen wir das Intervall $[a;b]$ in n Teilintervalle auf:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Betrachte das Intervall $I_1 = [x_0; x_1]$ mit der Intervallbreite $\Delta x_1 = x_1 - x_0$. In diesem Intervall lautet der größte Funktionswert M_1, der kleinste Funktionswert m_1. Es folgt:

$$m_1 \circ \Delta x_1 < A_1 < M_1 \circ \Delta x_1.$$

Wenn wir jedes Teilintervall $I_k = [x_{k-1}; x_k]$ mit der Intervallbreite $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ in der gleichen Weise behandeln, wobei der größte Funktionswert M_k, der kleinste Funktionswert m_k lautet, folgt:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} m_k \circ \Delta x_k \leq A \leq S_n := \sum_{k=1}^{n} M_k \circ \Delta x_k.$$

Unser Ziel besteht nun darin, eine bessere Näherung zu ermitteln. Aus der Zeichnung ist offensichtlich, dass wir die Kurve besser beschreiben können, wenn die Unterteilung in Teilintervalle verfeinern. Wenn wir die

Teilintervalle kleiner und kleiner machen, erhalten wir eine Zahlenfolge

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$$

für die untere Begrenzung der Fläche, die monoton steigt (warum?) und eine Zahlenfolge

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$$

für die obere Begrenzung der Fläche, die monoton fällt. Die gesuchte Fläche A befindet sich für jedes n zwischen den Werten s_n und S_n. Wenn die oben genannten Folgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, können wir der gesuchten Fläche das sogenannte **bestimmte Integral Intervall** $[a; b]$ zurordnen:

Bestimmtes Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx \;:=\; A \;=\; \lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n$$

Bemerkung: Das Integral existiert für alle stückweise stetigen, beschränkten Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen $[a; b]$. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ können wir nun aus jedem Intervall I_k einen beliebigen Wert ζ_k wählen. Dann folgt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \circ \Delta x_k \;\le\; \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \circ \Delta x_k \;\le\; \sum_{k=1}^{n} M_k \circ \Delta x_k \;\Leftrightarrow\; s_n \;\le\; \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \circ \Delta x_k \;\le\; S_n$$

Bilden wir nun den Grenzwert $n \to \infty$, so folgt:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;\le\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta x_k \;\le\; \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta x_k$$

5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Um die Fläche unter einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ zu bestimmen, können wir, falls $c \in]a; b[$ gilt, offensichtlich auch die Fläche unter f im Intervall $[a; c]$ und anschließend die Fläche im Intervall $[c, b]$ bestimmen. Es folgt:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_c^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$$

Wir betrachten nun die obere Intervallgrenze als variabel. Damit erhalten wir eine neue Funktion

$$F(x) \;:=\; \int_a^x f(y)\, dy$$

Wir versuchen nun, diese Funktion zu differenzieren und erhalten:

$$F'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - f(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(y)dy - \int_a^x f(y)dy}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(y)\, dy}{h}.$$

Wir verwenden nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und erhalten für ein $\zeta \in]x; x+h[$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} \left(f(x) + h \circ f'(\zeta)\right)\, dy}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h \circ f(x) + h \int_x^{x+h} \circ f'(\zeta)\, dy}{h} \\
&= f(x) + \lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} f'(\zeta)\, dy \;=\; f(x)
\end{aligned}$$

Also ergibt sich der

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)\, dx \quad = \quad f(x)$$

5.3 Unbestimmtes Integral und Anwendung des Hauptsatzes

Angenommen, wir wollen das Integral

$$\int_a^b f(x) \;\; dx$$

berechnen. Dazu benötigen wir eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ lautet. Wir schreiben die allgemeinste solche Funktion als **unbestimmtes Integral** $\displaystyle\int f(x)\, dx$. Ist $F(x)$ eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$, so folgt

$$\int f(x)\, dx \quad = \quad F(x) + C\,,\; C \in \mathbb{R}.$$

Die Konstante C bleibt unbestimmt, solange die Integrationsgrenzen nicht festliegen. Geht man durch Festlegung der Integrationsgrenzen zum **bestimmten Integral** über, so folgt:

$$\int_a^x f(x)\, dx \quad = \quad F(x) + C(a)\,,\; C(a) \in \mathbb{R}$$

Für $x = a$ ergibt sich daraus $C(a) = -F(a)$ und damit

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad = \quad \Big[F(x)\Big]_a^b \quad = \quad F(b) - F(a)$$

5.4 Rechenregeln für Integrale

Rechenregeln für die Integration:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx \;=\; c\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx \;=\; f(b) - f(a)$

5.5 Integrationstechniken

5.5.1 Partielle Integration

Aus der Produktregel für die Ableitung folgt für zwei differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) \;=\; f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b \;&=\; \int_a^b \frac{d}{dx}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)\,dx \\ &=\; \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Regel der **Partiellen Integration**:

Partiellen Integration

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Die Verwendung der partiellen Integration ist in zwei Fällen sinnvoll:

1. Der Integrand besteht aus zwei Faktoren, von denen für einen die Stammfunktion bekannt ist und der andere durch Differenzieren einfacher wird.

Beispiel: Partielle Intregration

Wir wollen das folgende bestimmte Integral lösen $\displaystyle\int_a^b x\ln x\,dx$:

Wir setzen nun:

$$f'(x) \;=\; x \;\Rightarrow\; f(x) \;=\; \frac{1}{2}\,x^2 \quad ; \quad g(x) \;=\; \ln x \;\Rightarrow g'(x) \;=\; \frac{1}{x}$$

Damit ergibt sich das Integral zu:

$$\int_a^b x \ln xq\, dx \;=\; \left[\frac{1}{2}\,x^2\, \ln x\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}\,x\, dx \;=\; \left[\frac{1}{2}\,x^2\, \ln x - \frac{1}{4}\,x^2\right]_a^b.$$

2. Der Integrand besteht des ursprünglichen Integrals ist auch der Integrand des nach der partiellen Integration verbleibenden Integrals.

Beispiel: Beispiel 2

$$I \;:=\; \int_a^b \sin x \cos x\, dx$$

Wir setzen nun:

$$f'(x) \;=\; \cos x \;\Rightarrow\; f(x) \;=\; \sin x \quad ; \quad g(x) \;=\; \sin x \;\Rightarrow\; g'(x) \;=\; \cos x$$

Damit ergibt sich das Integral zu:

$$I \;=\; \int_a^b \sin x \cos x\, dx \;=\; \Big[\sin^2 x\Big]_a^b - \overbrace{\int_a^b \sin x \cos x\, dx}^{I}$$

$$\Rightarrow\; I \;=\; \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_a^b.$$

5.5.2 Integration durch Substitution

Ist $F(x)$ Stammfunktion einer stetigen Funktion $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so folgt aus der Kettenregel:

$$f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\, F\big(g(x)\big) \;\Rightarrow$$

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx \;=\; \Big[F\big(g(x)\big)\Big]_a^b \;=\; \Big[F(x)\Big]_{g(a)}^{g(b)} \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

Damit ergibt sich die Formel für die

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

Falls die Funktion $g(x)$ invertierbar ist, kann man auch in umgekehrter Richtung vorgehen. Daraus erhält man das Verfahren der

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx$$

Substitutionsverfahren werden in den folgenden Situationen eingesetzt:

1. Die Integration durch Substitution bietet sich immer dann an. wenn der Integrand das Produkt einer verketteten Funktion und der Ableitung der inneren Funktion der Verkettung ist.

   Beispiel: Beispiel

   Wir betrachten das bestimmte Integral $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$:

   Wir setzen nun:

   $$y = 1+2x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x \Rightarrow dx = \frac{1}{4x}\,dy$$

   Damit ergibt sich das Integral zu:

   $$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \int_{y(0)}^{y(2)} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \Big[2\sqrt{y}\Big]_1^9 = 4.$$

2. Für die Integration durch Substitution der Integrationsvariablen gibt es leider keine allgemeinen Regeln, sondern nur einige Standardsubstitutionen, die in Spezialfällen sinnvoll sind.

   Beispiel: Beispiel

   $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ mit $t \in \,]-1;1[$.

   Wir setzen nun:

   $$x = \sin y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos x \Rightarrow dx = \cos x dy.$$

   Die Sinus-Funktion ist im Intervall $[-\pi/2;\pi/2]$ invertierbar und nimmt dort alle Werte aus dem Intervall $[-1;1]$ an. Daher ist die gezeigte Substitution möglich. Es folgt:

   $$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{y^{-1}(0)}^{y^{-1}(t)} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dy \\ &= \int_0^{\arcsin t} dy = \arcsin t.\end{aligned}$$

   Hier wurde $\arcsin(0) = 0$ benutzt und die Tatsache, dass die Kosinus-Funktion im Intervall $[-\pi/2;\pi/2]$ nicht-negativ ist und daher in diesem Intervall gilt:

   $$\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x.$$

   Mit diesem Ergebnis kann man außerdem das folgende unbestimmte Integral angeben:

   $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

5.5.3 Integration gebrochen-rationaler Funktionen und Partialbruchzerlegung

Wir betrachten das Integral einer gebrochen-rationalen Funktion,

$$\int \frac{z(x)}{n(x)}\,dx = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)}\,dx.$$

Dabei können die Nullstellen des Nenners auch identisch oder komplex sein. Die Grundlage der Integration gebrochen-rationaler Funktionen ist die

Partialbruchzerlegung
Eine echt gebrochen-rationale lässt in eine Summe aus elementaren gebrochen-rationalen Funktionen zerlegen.

Entscheidend hierfür ist die Linearfaktorzerlegung des Nenners.

Der Nenner hat nur einfache reelle Nullstellen

In diesem Fall hat die Partialbruchzerlegung die Gestalt:

$$\frac{z(x)}{\big(x-x_1\big)\big(x-x_2\big)\cdot\ldots\cdot\big(x-x_m\big)} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_m}{x-x_m}.$$

Dabei sind die Koeffizienten $A_1,\ldots,A_m$ reelle Zahlen, die bestimmt werden müssen.

Beispiel: Partialbruchzerlegung 1

$$\frac{x^2+3}{x^3-x} = \frac{x^2+3}{x\big(x-1\big)\big(x+1\big)} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}.$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, multiplizieren wir mit dem Nenner und erhalten:

$$x^2+3 = A_1\big(x+1\big)\big(x-1\big)+A_2\,x\,\big(x+1\big)+A_3\,x\,\big(x-1\big)$$

Nun wird dieser Ausdruck an verschiedenen Punkten ausgewertet:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x &=& 0: & 3 &=& -A_1 & \Rightarrow A_1 = -3 \\ ix &=& 1: & 4 &=& 2A_2 & \Rightarrow A_2 = 2 \\ x &=& -1: & 4 &=& -2A_3 & \Rightarrow A_3 = -2 \end{array}\right\} \frac{x^2+3}{x^3-x} = -\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

Der Nenner hat eine mehrfache Nullstelle:

In diesem Fall hat die Partialbruchzerlegung die Gestalt:

$$\frac{z(x)}{\big(x-x_1\big)^k} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{\big(x-x_1\big)^2}+\ldots+\frac{A_k}{\big(x-x_1\big)^k}$$

Dabei sind die Koeffizienten $A_1,\ldots,A_k$ zu bestimmen.

Beispiel: Beispiel

$$\frac{x^2}{\big(x-1\big)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{\big(x-1\big)^2}+\frac{A_3}{\big(x-1\big)^3}$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, multiplizieren wir mit dem Nenner und erhalten:

$$x^2 = A_1\big(x-1\big)^2+A_2\big(x-1\big)+A_3$$

Nun setzen $x = 1$ in den ersten drei Ableitungen dieses Ausdrucks ein:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Ableitung bei x=1} \;\Rightarrow A_3 = 1 \\ \text{2. Ableitung bei x=1:} \;\Rightarrow A_2 = 2 \\ \text{3. Ableitung bei x=1:} \;\Rightarrow A_1 = 1 \end{array}\right\} \frac{x^2}{\big(x-1\big)^3} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{\big(x-1\big)^2}+\frac{1}{\big(x-1\big)^3}$$

Der Nenner hat eine komplexe Nullstelle

In diesem Fall ist es meist sinnvoll, die Partialbruchzerlegung wie oben gezeigt mit Hilfe der komplexen Nullstellen durchzuführen und am Ende konjugiert komplexe Terme zusammenzufassen.

Beispiel: Partialbruchzerlegung 2

$$\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{x^3+4x^2+6x+4} = \frac{2\left(x^2+x-1\right)}{\left(x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{2\left(x^2+x-1\right)}{\left(x+2\right)\left(x+1+i\right)\left(x+1-i\right)}$$

Die Partialbruchzerlegung ergibt sich zu:

$$\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{x^3+4x^2+6x+4} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+1+i} + \frac{A_3}{x+1-i}$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, multiplizieren wir mit dem Nenner und erhalten:

$$2x^2+2x-2 = A_1(x+1+i)(x+1-i) + A_2(x+2)(x+1-i) + A_3(x+2)(x+1+i)$$

Wir setzen jetzt verschiedene Zahlenwerte in diesen Ausdruck ein:

$$\begin{array}{lll} x = -2: & 2 = 2A_1 & \Rightarrow A_1 = 1 \\ x = -1-i: & -4+2i = -2i\left(1-i\right)A_2 & \Rightarrow A_2 = 1/2-3/2i \\ x = -1+i: & -4-2i = 2i\left(1+i\right)A_3 & \Rightarrow A_3 = 1/2+3/2i \end{array}$$

Daraus ergibt sich die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{2\left(x^2+x-1\right)}{x^3+4x^2+6x+4} &= \frac{1}{x+2} + \frac{1-3i}{2\left(x+1+i\right)} + \frac{1+3i}{2\left(x+1-i\right)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{x-2}{x^2+2x+2}. \end{aligned}$$

Anwendung der Partialbruchzerlegung

Die Integration einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x)$ verläuft in den folgenden Schritten:

1. Zerlegung der Funktion $f(x)$ in ein Polynom $p(x)$ und eine echt gebrochen-rationale Funktion $g(x)$ mittels Polynomdivision. Die Integration des Polynoms ist trivial.

2. Bestimmung der Linearfaktoren des Nenners von $g(x)$. Zerlegung von $g(x)$ mittels Partialbruchzerlegung. Zusammenfassung der konjugiert komplexen Terme zu reellen Summanden.

3. Integration der einzelnen Summanden mit Hilfe der Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{\left(x+a\right)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(x+a\right)^{n-1}} + C\,,\ n > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\ \arctan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} + C$$

Die eventuell auftretenden Integrale $\dfrac{ax+b}{\left(x^2+2cx+d\right)^n}$, $n > 1$ können mittels partieller Integration und Integration durch Substitution auf die obigen Integrale zurückgeführt werden.

Beispiel: Partialbruchzerlegung 3

Wir wollen das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}\,dx$ berechnen:

1. Die Funktion $f(x) = \dfrac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2} = \dfrac{-2x+4}{\left(x+i\right)\left(x-i\right)\left(x-1\right)^2}$ ist bereits echt gebrochen-rational. Daher entfällt die Polynomdivision.
2. Die Zerlegung von $f(x)$ ergibt sich zu

$$f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{\left(x-1\right)^2} + \frac{A_3}{x-i} + \frac{A_4}{x+i}$$

Nun müssen die Koeffizienten bestimmt werden. Multipliziert man die Gleichung mit dem Nenner, so folgt:

$$\begin{aligned} -2x+4 = {} & A_1(x+i)(x-i)(x-1) + A_2(x+i)(x-i) \\ & + A_3(x+i)(x-1)^2 + A_4(x-i)(x-1)^2. \end{aligned}$$

Nun werden die Koeffizienten durch Einsetzen bestimmt

$$\begin{array}{lllll} \text{x=1} & 2 = A_2\left(1+i\right)\left(1-i\right) = 2A_2 & \Rightarrow & A_2 = 1 \\ \text{x=i} & -2i+4 = 2i\left(1-i\right)^2 A_3 = 4A_3 & \Rightarrow & A_3 = 1-i/2 \\ \text{x=-i} & 2i+4 = -2i\left(1+i\right)^2 A_4 = 4A_4 & \Rightarrow & A_4 = 1-i/2 \\ \text{f(1)':} & -2 = \left(1+i\right)\left(1-i\right)A_1 + 2A_2 = 2A_1+2 & \Rightarrow & A_1 = -2 \end{array}$$

Das Ergebnis lautet also:

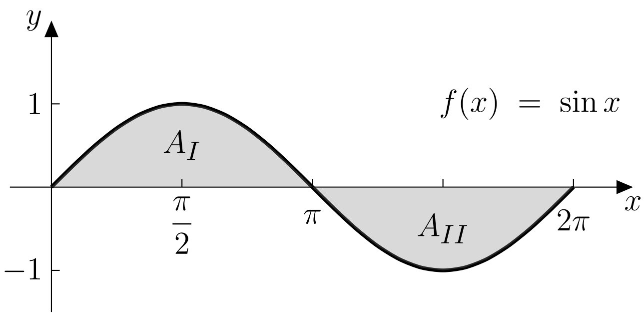
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{\left(x-1\right)^2} + \frac{1-i/2}{x-i} + \frac{1+i/2}{x+i} \\ &= \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{\left(x-1\right)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

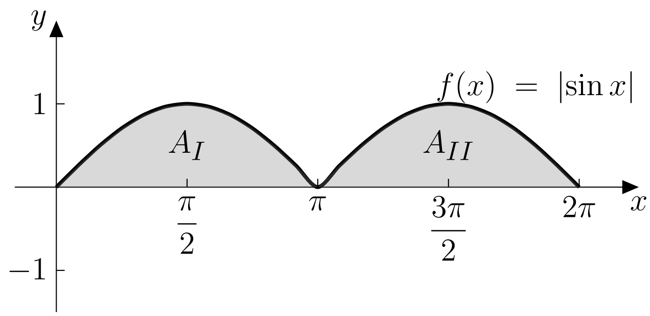
3. Mit Hilfe der Zerlegung ergibt sich das Integral zu

$$\begin{aligned} & \int \frac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}\,dx \\ &= \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{\left(x-1\right)^2} + \frac{2x}{\left(x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(x-1\right)^2}\right) dx \\ &= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln\left|x^2+1\right| + \arctan x + C. \end{aligned}$$

5.6 Die von Kurven eingeschlossene Fläche

5.6.1 Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse





Um die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse zu bestimmen ist die Beachtung des Vorzeichens von Bedeutung. So gilt zum Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \;\; dx \; = \; [-\cos x]_0^{2\pi} \; = \; A_I - A_{II} \; = \; 0$$

Dieses Ergebnis kommt dadurch zustande, dass die Fläche mit negativem Vorzeichen eingeht. Dieses Problem lässt sich durch Betrachtung des Betrages der Funktion beheben:

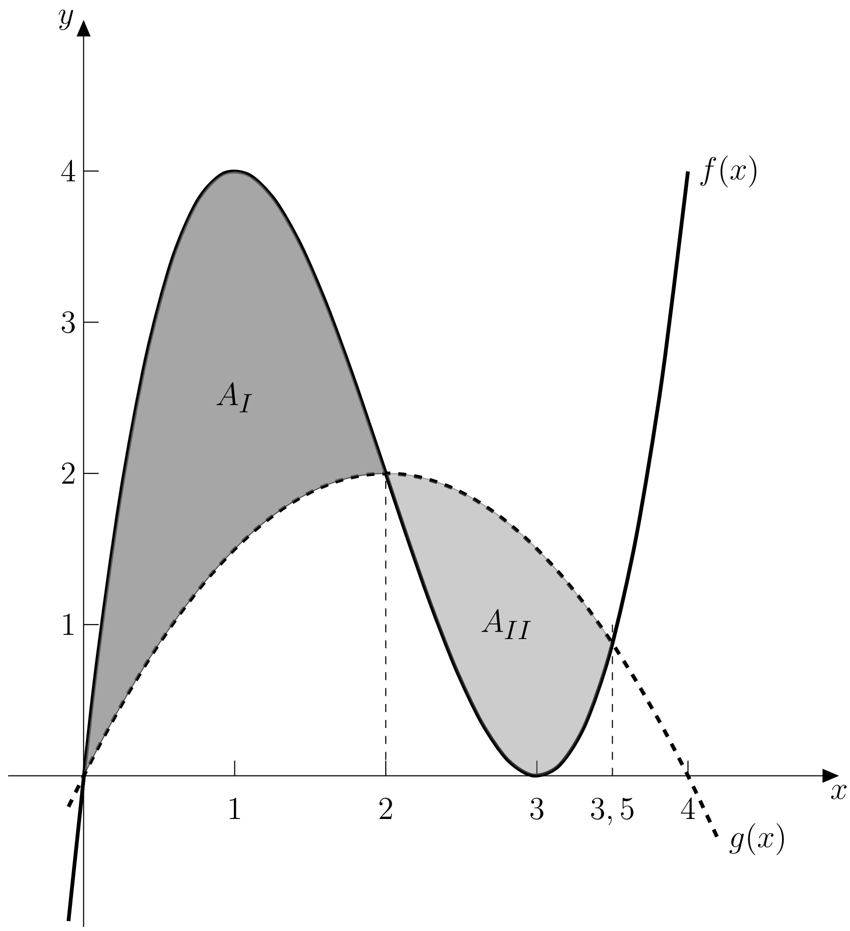
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| \;\; dx \; &= \; \int_0^{\pi} |\sin x| \;\; dx - \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| \;\; dx \\ &= \; [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \; = \; A_I + A_{II} \; = \; 4 \end{aligned}$$

Flächenberechnung
Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ ist gegeben durch

$$\int_a^b \big|f(x)\big| \, dx$$

Die von einer Kurve und der x-Achse vollständig eingeschlossene Fläche ist die Fläche zwischen dieser Funktion und der x-Achse im Intervall $[x_0; x_1]$, wobei x_0 die kleinste und x_1 die größte Nullstelle der Funktion ist.

5.6.2 Die Fläche zwischen zwei Kurven



In diesem Beispiel erkennt man: Im Intervall $[0;2]$ ist $f(x) > g(x)$. Die Fläche zwischen beiden Kurven ist die Differenz der Fläche zwischen $f(x)$ und der $x - Achse$ und der Fläche zwischen $g(x)$ und der x-Achse:

$$A_I = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$$

Im Intervall $[2;3,5]$ ist aber $g(x) > f(x)$. Damit ergibt sich:

$$A_{II} = \int_2^{3.5} g(x)\,dx - \int_2^{3,5} f(x)\,dx = \int_2^{3,5} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_2^{3,5} \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$$

Damit lautet die Gesamtfläche zwischen den Kurven:

$$A = A_I + A_{II} = \int_0^{3.5} \big|f(x) - g(x)\big|\,dx.$$

Fläche zwischen zwei Kurven
Die Fläche zwischen zwei durch $f(x)$ und $g(x)$ beschriebenen Kurven im Intervall $[a;b]$ ist gegeben durch

$$\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$$

Die von $f(x)$ und $g(x)$ vollständig eingeschlossene Fläche ist die Fläche zwischen den durch diese Funktionen beschriebenen Kurven im Intervall $[x_0;x_1]$, wobei x_0 der kleinste und x_1 der größte Schnittpunkt der beiden Funktionen ist.

Beispiel: Fläche zwischen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und $g(x) = -1/2\,x^2 + 2x$

Zunächst bilden wir die Differenz der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, um die Schnittpunkte der Funktionen zu ermitteln.

$$f(x) - g(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 7x = x\big(x - \frac{7}{2}\big)\big(x-2\big)$$

Diese Information kann nun genutzt werden, um das Vorzeichen von $f(x)-g(x)$ zu bestimmen:

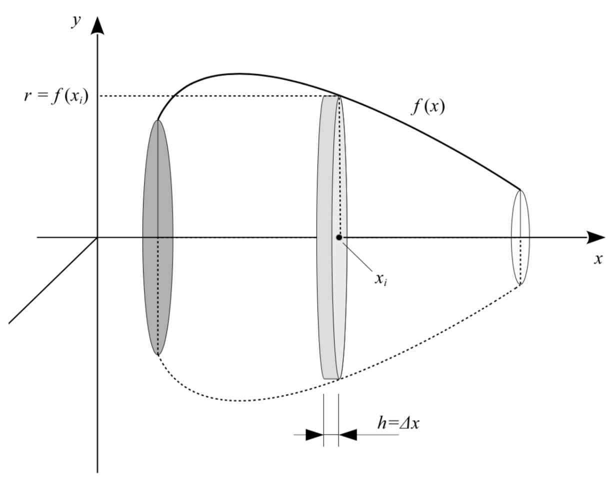
x	$-\infty$		0		2		$\frac{7}{2}$		∞
$f(x)-g(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	∞

Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist dann:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3,5} \big|f(x) - g(x)\big|\,dx = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_2^{3,5} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_2^{3.5} \\ &= \frac{937}{192}. \end{aligned}$$

5.7 Das Volumen von Rotationskörpern

Ist in einem Intervall $[a;b]$ eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben, so kann man die zwischen $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche um die x-Achse rotieren lassen. Der dabei entstehende Körper wird als **Rotationskörper** bezeichnet.



Wir wollen das Volumen des Rotationskörpers bestimmen: Wie in der Skizze dargestellt, lässt sich der Rotationskörper aus dünnen Zylinderscheiben zusammensetzen. Zunächst betrachten wir n Zylinderscheiben der Höhe Δx mit den Schwerpunkten $(x_1/0);\ldots;(x_n/0)$. Die Zylinderscheibe mit dem Schwerpunkt $(x_i/0)$ hat das Volumen

$$V_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot h = \pi \cdot \big(f\,(x_i)\big)^2 \cdot \Delta x$$

Eine Näherung für das Volumen des Rotationskörpers ist dann

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i)\big)^2 \cdot \Delta x$$

Wenn man die Höher Δx der Zylinder gegen 0 gehen lässt, erhält am das exakte Ergebnis:

Volumen eines Rotationskörpers
Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, so hat der durch Rotation der Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a;b]$ entstehende Rotationskörper das Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx.$$

Bemerkung: Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige und invertierbare Funktion, so lässt sich auch das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der Fläche zwischen $f(x)$ und der y-Achse entsteht, berechnen:

$$V = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \big(f^{-1}(y)\big)^2\, dy.$$

Dabei ist $f^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$.

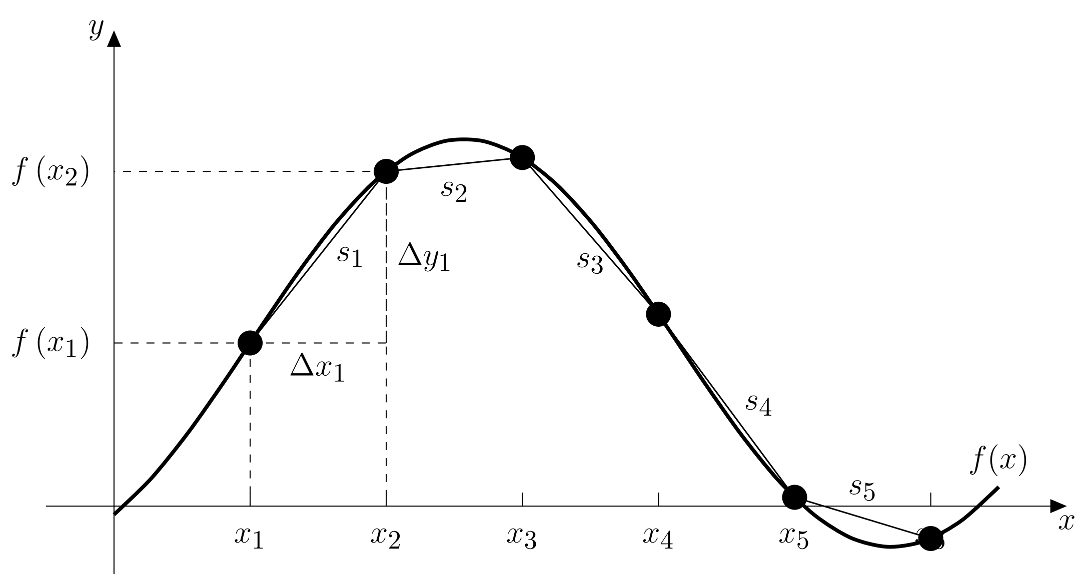
Beispiel: Das Volumen eines Kreiskegels des Radius r und der Höhe h
Ein Kreiskegel mit Radius r und Höhe h entsteht durch Rotation der Geraden

$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$$

um die x-Achse im Intervall $[0;h]$. Damit ergibt sich das Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

5.8 Die Länge einer Kurve



Die Länge der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ lässt sich mit Hilfe der Unterteilung $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ näherungsweise schreiben als

$$l \approx s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sqrt{\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta y_1\right)^2} + \ldots + \sqrt{\left(\Delta x_n\right)^2 + \left(\Delta y_n\right)^2}.$$

Nun gilt aber für jedes $i \in \{1;\ldots;n\}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2 + \left(\Delta y_i\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \\ &= \sqrt{1 + \left(f'\left(z_i\right)\right)^2} \cdot \Delta x_i \quad \text{für ein } z_i \in]x_i; x_{i+1}[.\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde der Mittelwertsatz verwendet. Wählt man nun $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x$, so folgt:

$$l \approx \sqrt{1 + \left(f'\left(z_1\right)\right)^2} \cdot \Delta x + \ldots + \sqrt{1 + \left(f'\left(z_n\right)\right)^2} \cdot \Delta x \quad \text{für } z_i \in]x_i; x_{i+1}[.$$

Um die exakte Länge zu erhalten, kann man nun die Zahl der Zwischenpunkte n gegen unendlich und ihre Abstände Δx gegen 0 gehen lassen. Dann folgt:

Länge einer Kurve
Die Länge einer durch eine stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ beschriebenen Kurve im Intervall $[a;b]$ ist gegeben durch

$$l(f;[a;b]) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Beispiel: Die Länge der Kurve $f(x) = x^{3/2}$ im Intervall $[0;2]$
Mit der Ableitung $f'(x) = 3/2 \cdot \sqrt{x}$ folgt für die Kurvenlänge:

$$\begin{aligned} ql(x^{3/2};[0;2]) &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx \\ &= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{3/2} - 1\right) \approx 3,5.\end{aligned}$$

5.9 Aufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{2x-3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-7x+6}{2x+2},\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{27}{8}\right)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{c}(x-c)\sqrt{x}\,dx,\quad c>0$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{c}\sqrt{x+c}\;dx,\quad c>0$

f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{c}(x-c)\;dx,\quad c>0$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{c}(x-c)^2\;dx,\quad c>0$

h) $\displaystyle\int \frac{x+2}{e^{2x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^3}$

j) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-6}{x^2+x-2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+5}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{10}{x^2+2x+3}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{\left(x^2+5\right)\left(x^2+2x+3\right)}\,dx$

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden, jeweils durch den Graphen der Funktion und die Koordinatenachsen begrenzten Flächenstücke.

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{27}{8}$

b) $y = f(x) = \dfrac{x^2-7x+6}{2x+2}$

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{c}(x-c)\sqrt{x},\quad c>0$

d) $y = f(x) = \dfrac{x}{c}\sqrt{x+c},\quad c>0$

e) $y = f(x) = \dfrac{e^x}{c}(x-c),\quad c>0$

f) $y = f(x) = \dfrac{x+2}{e^{2x}}$

Aufgabe 3

Der Graph der Funktion

$$y = f(x) = \frac{4}{2x-3},$$

die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ begrenzen ein Flächenstück. Durch eine Gerade $x = c$ $\left(2 < c < 6\right)$ wird das Flächenstück in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.Berechnen Sie den Wert von c.

Aufgabe 4

Der Graph der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{2x + 2},$$

die Tangente im Punkt $P(6/0)$ an diesen Graphen und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Aufgabe 5

Die folgenden endlichen Flächenstücke rotieren um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

a) Aufgabe 3
b) Aufgabe 2c)
c) Aufgabe 2d)
d) Aufgabe 2e)
e) Aufgabe 2e) mit $c = 2$
f) Aufgabe 2f)

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Wert c für den Fall, dass das Volumen des Rotationskörper aus Aufgabe 2d) die Maßzahl 3π habe.

Aufgabe 7

Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 5}$ rotiert im Intervall $y \in [e^{-1}; 1]$ um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx.$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie den Flächeninhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die Koordinatenachsen, die Gerade $x = 1$ und den Graphen der Funktion

$$y = f(x) = \frac{6 - 2x}{x^3 + 2x^2 - 4x + 16}$$

begrenzt wird.