

TH-2 11. Übungsblatt Mathematik

Besprechung am *Dienstag, 15. Mai 2018*

Aufgabe 41. (*Grenzwerte von Funktionen 1*)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

- | | |
|---|---|
| (i) $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2}$ (Ergebnis: -4) | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3 - \sqrt{x^2 + 9}}$ (Ergebnis: 0) |
| (ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{3(\sqrt[3]{x-1})}$ (Ergebnis: komplexe Funktion) | (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{2x}$ (Ergebnis: 0) |
| (iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}$ (Ergebnis: $-1/9$) | (iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ (Ergebnis: $\pm\infty$) |
| (iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9(x-3)}{x^4 - 81}$ (Ergebnis: $1/12$) | (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{3x}$ (Ergebnis: $1/3$) |
| (v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$ (Ergebnis: $-1/4$) | (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 5x}$ (Ergebnis: $1/5$) |
| (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x}$ (Ergebnis: $-1/\sqrt{2}$) | (vi) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{2 + \frac{1}{x}}$ (Ergebnis: $-2/3$) |

Aufgabe 42. (*Grenzwerte von Funktionen 2*)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ (Ergebnis: $2a$)
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}$ (Ergebnis: \sqrt{a})
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ (Ergebnis: $1/(2\sqrt{a})$)

Aufgabe 43. (*Unstetigkeitsstellen*)

Für welche Werte von x haben die folgenden Funktionen Unstetigkeitsstellen? Bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der Funktionen an diesen Stellen und die Art der Unstetigkeit.

Nutzen Sie einerseits die Nullfolge $x = \frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$, für den Fall $x \rightarrow 0$ und andererseits die Substitution $x = a + h$, $h \rightarrow 0$, für den Fall $x \rightarrow a$.

- (i) $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ (Ergebnis: Polstelle bei $x = -2, x = -1$)
- (ii) $y = f(x) = \frac{2-x}{2-|x|}$ (Ergebnis: Hebbare Definitionslücke bei $x = 2$, Polstelle bei $x = -2$)
- (iii) $y = f(x) = \frac{1 + 2\frac{1}{x}}{1 - 2\frac{1}{x}}$ (Ergebnis: Sprung bei $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$)
- (iv) $y = f(x) = 2xe^{\frac{1}{x-2}}$ (Ergebnis: Polstelle bei $x = 2$ mit $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \infty$)
- (v) $y = f(x) = \frac{x}{\sin x}$ (Ergebnis: Hebbare Definitionslücke bei $x = 0$, Polstellen bei $x = \pi, 2\pi, \text{etc.}$)

Aufgabe 44. (*Stetigkeit*)

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \sqrt{x-1} + 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(Ergebnis: $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$.)