

Zahlen fallen nicht vom Himmel

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik

Ob von den natürlichen zu den ganzen Zahlen und zu den Bruchzahlen, von den rationalen zu den irrationalen Zahlen oder von den reellen zu den komplexen Zahlen: Zahlbereichserweiterungen sind *Prozesse*, die erstaunliche Gemeinsamkeiten aufweisen.

GÜNTHER MALLE In der Geschichte der Mathematik wurden bekanntlich immer wieder Zahlbereiche erweitert. Die Entstehung neuer Zahlen war jedoch in allen Fällen ein langwieriger, mit vielen Hürden gespickter Prozess. Bis die neuen Zahlen fertig waren, hat es meist viele Jahrhunderte gedauert, wobei ziemlich verschlungene Wege und oft auch Sackgassen beschritten wurden. In Anbetracht dieser Schwierigkeiten wäre es ziemlich naiv zu glauben, dass unsere Schülerinnen und Schüler Zahlbereichserweiterungen schnell und problemlos vollziehen können. Auch wenn wir sie durch einen sorgfältig geplanten Unterricht heute besser leiten können als früher, können wir ihnen nicht ersparen, die *Prozesse* der Bildung neuer Zahlen selbst nachzuvollziehen. Dabei stoßen sie auf Hindernisse, die den historischen Schwierigkeiten sehr ähnlich sind.

Ein didaktischer Blick auf historische Zahlbereichserweiterungen

Wir unterscheiden an der Mathematik zwei Ebenen: die Ebene der *offiziellen Theorie* und die Ebene der dahinter liegenden *intuitiven Vorstellungen* (Bedeutungen). Diese beiden Ebenen können nur sehr selten in einen wirklichen Einklang gebracht werden. Sie stehen meist miteinander in einem Konflikt und wirken deshalb verändernd aufeinander ein. Verträgt sich die offizielle Theorie nicht gut mit den dahinter stehenden intuitiven Vorstellungen, so gibt es zwei Möglichkeiten der Verbesserung: entweder man ändert die offizielle Theorie, sodass diese besser zu den intuitiven Vorstellungen passt, oder man ändert die intuitiven Vorstellungen, sodass diese besser zur offiziellen Theorie passen. Mit Termini, die auf Piaget zurückgehen, könnte man im ersten Fall von einer Akkommodation der offiziellen Theorie an die intuitiven Vorstellungen und im zweiten Fall von einer Assimilation der intuitiven Vorstellungen unter

die offizielle Theorie sprechen (siehe **Abb. 1**). Diese gegenseitigen Beeinflussungen der beiden Ebenen führen zu ständigen Veränderungen und treiben dadurch die Entwicklung voran.¹ Dieses soll nun an vier Zahlbereichserweiterungen illustriert werden.

Entstehung der Bruchzahlen aus den natürlichen Zahlen

Über die Ursprünge der Bruchzahlen weiß man fast nichts. Vielleicht tauchten sie aus praktischen Anlässen auf (Aufteilen, Vergleichen, Messen etc.), vielleicht schummelten sie sich aber auch hinterlistig und fast unbemerkt als formale Ausdrücke in die Mathematik, etwa beim Dividieren. Wenn man 4 durch 2 dividieren darf, warum sollte man dann nicht auch 3 durch 4 dividieren dürfen?

Symbole für Bruchzahlen findet man schon bei den vorgriechischen Völkern. Diese Symbole wurden eher unreflektiert verwendet und intuitiv höchstwahrscheinlich als nützliche Werkzeuge empfunden. Die Frage, ob hinter diesen Symbolen irgendwelche Objekte oder gar Zahlen stehen, wurde nicht gestellt. Diese Frage warfen erst die griechischen Philosophen und Mathematiker im Umkreis von Aristoteles und Euklid auf – und beantworteten sie negativ. Die Bruchzahlen passten nicht in ihren offiziellen Zahlbegriff, der durch zwei Dogmen festgelegt war:

- Eine Zahl ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit.
- Die Einheit ist unteilbar.

Auf der anderen Seite konnten bereits die vorgriechischen Völker (Ägypter, Mesopotamier) Bruchzahlen mit Ziffern darstellen, mit ihnen rechnen und messen, sie in der Geometrie verwenden, mit ihnen praktische Probleme lösen. Außerhalb der Philosophenstuben, etwa auf den griechischen Marktplätzen, war es wohl ähnlich. Die Bruchzahlen unterschieden sich also im Gebrauch nicht wesentlich von den natürlichen Zahlen. Dies drängte nach einer Bereinigung in der offiziellen Theorie.

Es ist interessant, wie die Griechen dies bewerkstelligt haben. Sie haben ihre Vorstellungen von einer Zahl nicht aufgegeben und ihren Zahlbegriff nicht erweitert, sondern ihre Theorie mit Zusatzbegriffen angereichert, die die Situation retten sollten. Der zunächst herangezogene Zusatzbegriff war der

Begriff „Verhältnis“: Bruchzahlen wurden als Verhältnisse von natürlichen Zahlen aufgefasst. Dabei waren diese Verhältnisse zunächst nur als Bestandteile von Proportionsaussagen lebensfähig. Man konnte zwar sagen „ $a : b$ verhält sich wie $3 : 4$ “, aber $3 : 4$ allein war sinnlos. Man sprach konsequenterweise auch nicht von der(!) Zahl $\frac{3}{4}$, sondern davon, dass sich zwei(!) Zahlen wie $3 : 4$ verhalten. Verhältnisse wurden intuitiv nicht als eigenständige Denkobjekte oder gar Zahlen empfunden, sondern vielmehr als Beziehungen zwischen den alten (natürlichen) Zahlen.

Durch den beständigen Gebrauch wurden die Verhältnisse möglicherweise zu eigenständigen Denkobjekten. Die Anerkennung eines Verhältnisses als Zahl gelang den Griechen jedoch nicht. Ein Schritt in diese Richtung war die Einführung des Zusatzbegriffes „Wert eines Verhältnisses“ in der alexandrinischen Zeit (etwa bei Theon von Alexandria um 300 n. Chr.). Dieser Begriff war Ausdruck eines inneren Dilemmas. Einerseits war man intuitiv bereit, die Verhältnisse als neue Zahlen anzuerkennen, andererseits wurde dies durch den griechischen Zahlbegriff verboten. Kurz gesagt: Die Verhältnisse waren Zahlen und doch keine. Durch den Zusatzbegriff des *Wertes eines Verhältnisses* gelang wenigstens eine bedingte (mit Vorbehalten versehene) Anerkennung der Bruchzahlen in der offiziellen Theorie.

Nach den Griechen zerbrachen sich die Araber intensiv den Kopf darüber, ob der Wert eines Verhältnisses eine Zahl sein könne. Im 13. Jahrhundert schreibt schließlich Barlaam:

Der Wert eines Verhältnisses ist die Zahl(!), welche mit dem Hinterglied multipliziert das Vorderglied ergibt.

Der Wert des Verhältnisses $3 : 4$ ist also $\frac{3}{4}$, weil $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ ist. Im praktischen Gebrauch wurde dann aber nicht immer zwischen „Verhältnis“ und „Wert des Verhältnisses“ unterschieden. Dies förderte auf der intuitiven Ebene die Auffassung eines Verhältnisses als Zahl. Der Zusatzbegriff „Wert eines Verhältnisses“ wurde damit hinfällig und verschwand auch wieder.

Die endgültige Anerkennung der Bruchzahlen in der offiziellen Theorie ließ aber noch auf sich warten und geschah erst durch Petrus Ramus (1515–1572), der den griechischen Zahlbegriff endgültig überwand und eine Zahl anders definierte:

Numerus est secundum quem unumquodque numeratur. (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen.)

Mit dieser Definition wollte Ramus alles erfassen, was dem Zählen und den vier Grundrechnungsarten

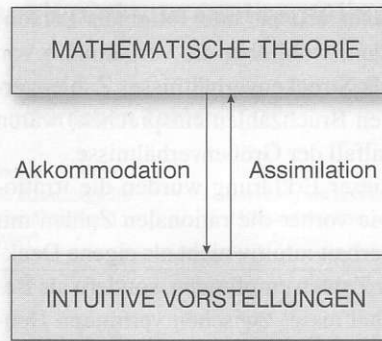


Abb. 1: Wechselwirkungen zwischen mathematischer Theorie und intuitiven Vorstellungen

zugänglich ist, also die positiven rationalen Zahlen. (Es ist nicht sinnvoll, „numerare“ nur mit „zählen“ zu übersetzen, weil Ramus darunter nachweislich die vier Grundrechnungsarten subsumierte.)

In **Kasten 1, Beispiel 1** (S. 7) ist dieser Ablauf schematisch dargestellt, wobei die in Abb. 1 angesprochene Wechselwirkung der beiden Ebenen längs einer Zeitdimension auseinander gezogen ist.

Entstehung der irrationalen Zahlen aus den rationalen Zahlen

Bereits die vorgriechischen Völker rechneten mit Näherungswerten für gewisse irrationale Zahlen wie π oder $\sqrt{2}$. Es lässt sich jedoch im Einzelfall nicht mit Sicherheit sagen, ob die Existenz „genauer Werte“ akzeptiert wurde und ob bekannt war, dass es sich bei den Angaben nur um Näherungswerte handelt. Bei den Chinesen (Chang Suan Shu) gibt es jedenfalls Hinweise dafür, dass man für π beliebig viele Dezimalstellen hinschreiben könne.

Die Griechen entdeckten die irrationalen Zahlen in Form inkommensurabler Strecken, das sind Strecken, für die kein gemeinsames Maß existiert und deren Längenverhältnis daher nicht durch ein Verhältnis von (natürlichen) Zahlen dargestellt werden kann (zum Beispiel Seiten- und Diagonalenlänge eines Quadrats). Auch wenn die Entdeckung solcher Streckenverhältnisse eine Grundlagenkrise der griechischen Mathematik auslöste, wurden diese in der Folge ziemlich unreflektiert gebraucht und intuitiv als nützliche Werkzeuge der Geometrie angesehen. Die Frage, ob sich dahinter Zahlen verbergen, wurde nicht gestellt.

Der erste Erklärungsversuch in der offiziellen Theorie erfolgte ähnlich wie bei den Bruchzahlen durch einen Zusatzbegriff, nämlich den Begriff „Größenverhältnis“. Der Begriff „Verhältnis“ wurde ja schon bei den Bruchzahlen verwendet und konnte von dort übernommen werden. Der Begriff „Größe“ war aus der Geometrie geläufig und umfasste Zahlen, Strecken, Flächen, Körper usw. Inkommensurable Strecken konnten zwar nicht als Verhältnisse

von Zahlen (d. h. natürlicher oder rationaler Zahlen) aufgefasst werden, wohl aber als Verhältnisse von Größen, z. B. als Streckenverhältnisse. Zahlenverhältnisse (die den Bruchzahlen entsprechen) waren dabei ein Spezialfall der Größenverhältnisse.

Aufgrund dieser Erklärung wurden die irrationalen Zahlen wie vorher die rationalen Zahlen mit ziemlicher Sicherheit intuitiv nicht als eigene Denkobjekte oder gar Zahlen empfunden, sondern als Beziehungen (Verhältnisse) zwischen vertrauten Denkobjekten (Größen). So schreibt etwa Heron von Alexandria:

Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Vergleichenen.

Obwohl Größenverhältnisse von den Griechen zunächst nicht als eigene mathematische Denkobjekte angesehen wurden, gelang es ihnen, den Proportionskalkül, der zunächst nur auf kommensurable Größen anwendbar war, auf inkommensurable Größen auszudehnen. Dabei musste erklärt werden, was eine Proportionsaussage der Form $a:b = c:d$ bedeutet, wenn die Größen a und b bzw. c und d inkommensurabel sind. Vermutlich schon im 5. Jahrhundert v. Chr. wurde eine Theorie geschaffen, in der die Gleichheit zweier Verhältnisse durch das Verfahren der Wechselwegnahme (Antanairesis oder Anthyphairesis) gekennzeichnet wurde. Dieses Verfahren ist nichts anderes als der heute so genannte „Euklidische Algorithmus“. Zwei Verhältnisse wurden als gleich angesehen, wenn sie dieselbe Wechselwegnahme besitzen, d. h. beim Euklidischen Algorithmus dieselbe (endliche oder unendliche) Folge von Resten ergeben. Im 4. Jahrhundert v. Chr. wurde diese Theorie durch die im fünften Buch von Euklid dargestellte Theorie verdrängt, welche dem Eudoxos zugeschrieben wird. Die grundlegende Definition lautet:

Größen stehen in demselben Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn die gleichen Vielfachen der ersten und dritten und die gleichen Vielfachen der zweiten und vierten – bei jeder beliebigen Vervielfachung – einander entweder zugleich übertreffen oder gleichkommen oder unterschreiten, in entsprechender Ordnung genommen.

In moderner Schreibweise ist das leichter verständlich: Die vier Größen a, b, c, d stehen in Proportion ($a:b = c:d$), wenn für alle natürlichen Zahlen m, n jeweils genau eine der folgenden Aussagen gilt:

- (1) $m \cdot a < n \cdot b$ und $m \cdot c < n \cdot d$
- (2) $m \cdot a = n \cdot b$ und $m \cdot c = n \cdot d$
- (3) $m \cdot a > n \cdot b$ und $m \cdot c > n \cdot d$

Aus dem geometrischen Kontext konnten die Griechen sich jedoch nicht lösen. Insbesondere wurden Wurzelausdrücke von den Griechen vermutlich nie arithmetisch aufgefasst. Dies scheint erst eine Leistung der Araber gewesen zu sein. Allerdings ging diese Loslösung auch bei den Arabern nicht ohne Schwierigkeiten vonstatten, was die synonyme Verwendung von geometrischen und arithmetischen Begriffen bezeugt, etwa „Zahl“, „Größe“ und „Linie“. Zum Beispiel ist die Rede von einer „Linie, die als Wurzel einer Zahl erscheint“. Bei Al-Nayrizi (ca. 875–940 n. Chr.) finden wir allerdings auch die folgende Beschreibung der Formel

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Wenn wir die Wurzel aus einer Zahl zur Wurzel aus einer Zahl addieren wollen, so addieren wir zunächst die beiden Quadrate der beiden Wurzeln und dazu noch zweimal die Wurzel aus ihrem Produkt. Aus dem Ergebnis ziehen wir die Wurzel.

In dieser Beschreibung kommt kein geometrischer Ausdruck mehr vor. (Den Beweis der Formel führt Al-Nayrizi allerdings noch geometrisch.) Abu Kamil (ca. 850–930 n. Chr.) rechnet reine Zahlenbeispiele zu dieser Formel vor wie zum Beispiel

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = \sqrt{9 + 4 + 2\sqrt{9 \cdot 4}} = \sqrt{25} = 5.$$

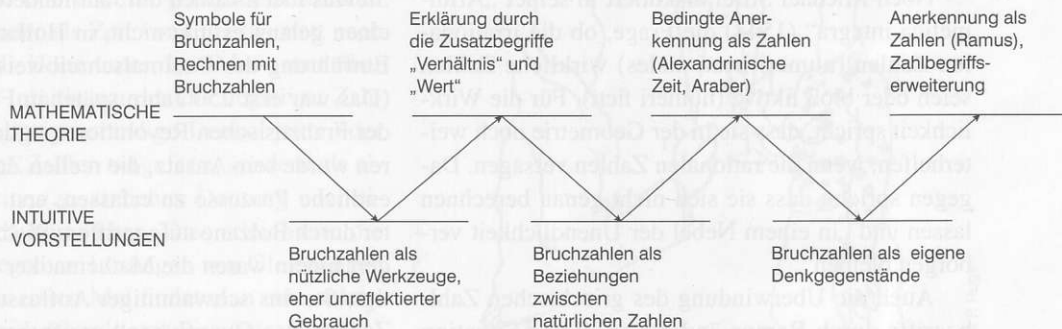
Die Möglichkeit, Wurzelausdrücke zu addieren und zu subtrahieren, sowie – was einfacher ist – zu multiplizieren und zu dividieren, erleichtert es, sie auf der intuitiven Ebene als Zahlen aufzufassen.

Omar Hayyam (ca. 1048–1131) diskutiert ausführlich, ob Größenverhältnisse Zahlen seien: „*Kann ein Verhältnis von Größen seinem Wesen nach eine Zahl sein oder wird es nur von einer Zahl begleitet ...?*“ Einen Fortschritt gibt es bei ihm: Sind A und B zwei Größen, so wählt er eine Einheitsgröße E und eine Hilfsgröße G , für die $A:B = G:E$ gilt. Im weiteren Text redet er nur mehr von der Hilfsgröße G und nicht mehr von der Einheitsgröße E , was darauf hinweist, dass er stillschweigend $G:E$ mit G identifiziert. Diese Größe G , sagt er, „*wollen wir nicht als Linie, Fläche, Körper oder Zeit auffassen, sondern wir wollen sie auffassen als eine durch den Verstand von all dem losgelöste und zu den Zahlen gehörende Größe, jedoch nicht zu den absoluten und echten Zahlen ...*“.

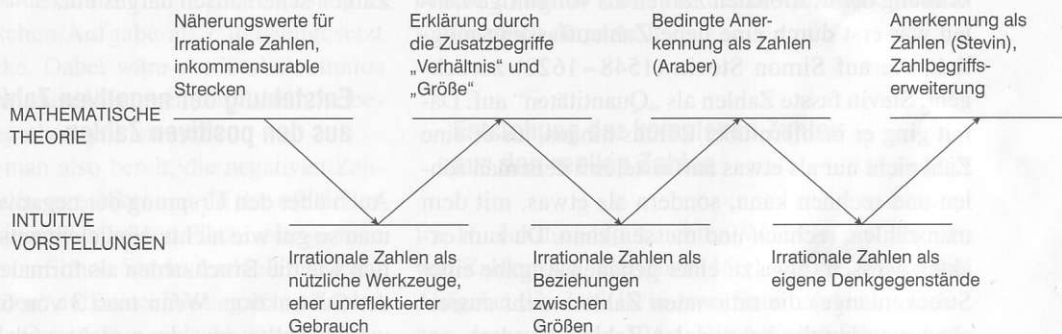
Solche Äußerungen sind für die Folgezeit typisch, in der die irrationalen Zahlen zwar als Zahlen, aber als „nicht aussprechbare“, „fingierte“, „absurde“, „unerklärbare“, „unwirkliche“, „irreguläre“ und eben „irrationale“ Zahlen bezeichnet wurden. Diese Worte sind der Ausdruck eines inneren Zwiespaltes: Man war nun bereit, die irrationalen Zahlen als Zahlen anzuerkennen, aber dies war durch das griechische Zahlenmodell verboten, da die irratio-

Zahlbereichserweiterungen im Wechselspiel von mathematischer Theorie und intuitiver Vorstellung

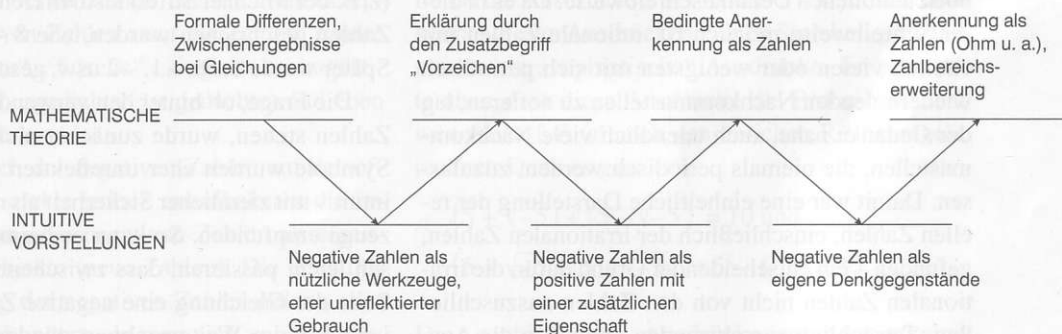
Beispiel 1: Entstehung der Bruchzahlen aus den natürlichen Zahlen



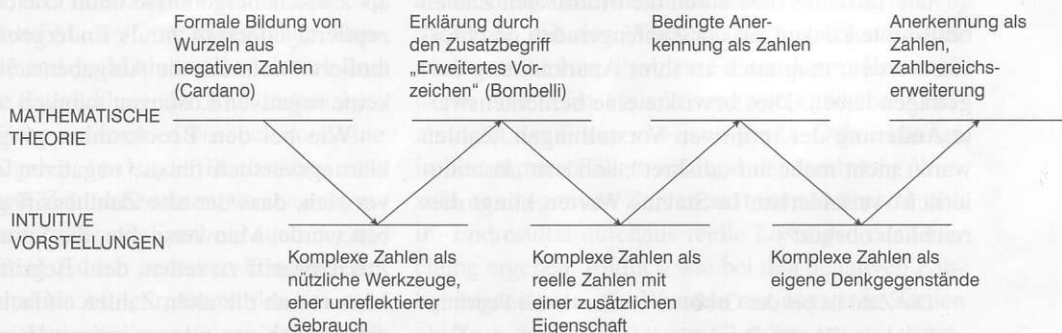
Beispiel 2: Entstehung der irrationalen Zahlen aus den rationalen Zahlen



Beispiel 3: Entstehung der negativen Zahlen aus den positiven Zahlen



Beispiel 4: Entstehung der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen



nalen Zahlen nicht aus Einheiten zusammengesetzt werden können. So wurde nur eine bedingte Anerkennung der irrationalen Zahlen in der offiziellen Theorie erreicht.

Noch Michael Stifel diskutiert in seiner „Arithmetica integra“ (1544) die Frage, ob die irrationalen Zahlen (numeri irrationales) wirkliche Zahlen seien oder bloß fiktive (numeri ficti). Für die Wirklichkeit spricht, dass sie in der Geometrie noch weiterhelfen, wenn die rationalen Zahlen versagen. Dagegen spricht, dass sie sich nicht genau berechnen lassen und „in einem Nebel der Unendlichkeit verborgen bleiben“.

Auch die Überwindung des griechischen Zahlbegriffs durch Ramus änderte an dieser Situation nichts, weil man mit den irrationalen Zahlen weder zählen noch (numerisch) rechnen kann. Die Anerkennung der irrationalen Zahlen als vollgültige Zahlen war erst durch eine neue Zahlauffassung möglich, die auf Simon Stevin (1548–1620) zurückgeht. Stevin fasste Zahlen als „Quantitäten“ auf. Damit ging er insofern über Ramus hinaus, als er eine Zahl nicht nur als etwas auffasste, mit dem man zählen und rechnen kann, sondern als etwas, mit dem man zählen, rechnen und messen kann. Da zum exakten Messen (etwa zu einer genauen Angabe einer Streckenlänge) die rationalen Zahlen nicht ausreichen, wurden die irrationalen Zahlen mit dazu genommen.

Stevin war ein eifriger Verfechter der damals noch unüblichen Dezimalschreibweise. Da es in dieser Schreibweise möglich ist, rationale Zahlen mit endlich vielen oder wenigsten mit sich periodisch wiederholenden Nachkommastellen zu notieren, lag der Gedanke nahe, auch unendlich viele Nachkommastellen, die niemals periodisch werden, zuzulassen. Damit war eine einheitliche Darstellung der reellen Zahlen, einschließlich der irrationalen Zahlen, gefunden – ein entscheidender Grund dafür, die irrationalen Zahlen nicht von den Zahlen auszuschließen. Tatsächlich verschwanden daraufhin die Ausdrücke „absurd“, „irregulär“ etc. Das Wort „irrational“ behielt nur mehr eine technische Bedeutung bei.

Die Tatsache, dass durch die irrationalen Zahlen bestimmte Lücken auf der Zahlengeraden geschlossen werden, mag auch zu ihrer Anerkennung beigetragen haben. Dies bewirkte eine bemerkenswerte Änderung der intuitiven Vorstellungen. Zahlen waren nicht mehr nur „diskret“, sondern „kontinuierlich“ veränderbar. In Stevins Worten klingt dies reichlich obskur:

Die Zahl ist bei der Größe so etwas wie die Feuchtigkeit beim Wasser. Denn wie diese sich durch das Ganze und in jeden Teil des Wassers erstreckt, so erstreckt sich die einer Größe zugeordnete Zahl durch die ganze Größe und in jeden Teil. Und wie einer kontinu-

ierlichen Wassermenge eine kontinuierliche Feuchtigkeit entspricht, so entspricht einer kontinuierlichen Größe eine kontinuierliche Zahl.

Stevins Ideen kamen um Jahrhunderte zu früh. Zum einen gelang es ihm nicht, in Holland die amtliche Einführung der Dezimalschreibweise zu erwirken. (Das war erst 250 Jahre später in Frankreich nach der Französischen Revolution möglich.) Zum anderen wurde sein Ansatz, die reellen Zahlen durch unendliche Prozesse zu erfassen, erst 200 Jahre später durch Bolzano aufgegriffen. Bis ins 20. Jahrhundert hinein waren die Mathematiker damit beschäftigt, Stevins schwammiger Auffassung der reellen Zahlen als „Quantitäten“ greifbarere Konturen zu verleihen. In **Beispiel 2 (Kasten 1, S. 7)** wird die Entstehung der irrationalen Zahlen aus den rationalen Zahlen schematisch dargestellt.

Entstehung der negativen Zahlen aus den positiven Zahlen

Auch über den Ursprung der negativen Zahlen weiß man so gut wie nichts. Vielleicht entstanden sie ähnlich wie die Bruchzahlen als formale Ausdrücke bei der Subtraktion. Wenn man 3 von 6 abziehen darf, warum sollte man dann nicht auch 6 von 3 abziehen dürfen? Für diese Entstehung spricht jedenfalls, dass die negativen Zahlen bis ins 16. Jahrhundert (z. B. bei Michael Stifel) als Differenzen natürlicher Zahlen geschrieben wurden, wie $8 - 9$, $0 - 2$ usw. Später wurde dafür -1 , -2 usw. geschrieben.

Die Frage, ob hinter den verwendeten Symbolen Zahlen stehen, wurde zunächst nicht gestellt. Die Symbole wurden eher unreflektiert gebraucht und intuitiv mit ziemlicher Sicherheit als nützliche Werkzeuge empfunden. So kann es beim Gleichungslösen leicht passieren, dass zwischendurch auf einer Seite der Gleichung eine negative Zahl auftritt, die jedoch beim Weiterrechnen wieder verschwindet und zu einer positiven Lösung führt. Auch von den Indern und Chinesen wurden die negativen Zahlen als Zwischenergebnisse beim Gleichungslösen akzeptiert, jedoch nicht als Endergebnisse. Man formulierte vielmehr die Aufgabenstellungen so, dass keine negativen Lösungen möglich waren.

Wie bei den Bruchzahlen ging der erste Erklärungsversuch für die negativen Zahlen nicht so vor sich, dass der alte Zahlbegriff gleich aufgegeben wurde. Man versuchte, die Situation mit einem Zusatzbegriff zu retten, dem Begriff „Vorzeichen“. Man versah die alten Zahlen einfach zusätzlich mit einem positiven oder negativen Vorzeichen, formulierte Vorzeichenregeln und konnte damit rechnen.

Auf der intuitiven Ebene ließen sich die unterschiedlichen Vorzeichen vielfältig deuten, wobei

stets eine gewisse Gegensätzlichkeit ausgedrückt wurde. Die negativen Zahlen unterschieden sich von den alten (positiven) Zahlen nur durch eine zusätzliche (einen Gegensatz ausdrückende) Deutung: -5 war dasselbe wie $+5$, nur gedeutet als Schuld statt Guthaben oder als Zeit vor Christus statt nach Christus oder als Höhe unter dem Meer statt über dem Meer usw. Intuitiv wurden die negativen Zahlen also nicht als eigenständige Denkobjekte oder gar eigenständige Zahlen aufgefasst, sondern als alte Zahlen mit einer zusätzlichen Deutung oder einem zusätzlichen Vorzeichen. Dies erleichterte die Anerkennung negativer Lösungen von Gleichungen als Zahlen. Zum ersten Mal findet man eine solche Anerkennung bei Leonardo von Pisa (gen. Fibonacci). Er deutet eine negative Lösung einer Aufgabe, in der nach Geldbeträgen gefragt wird, als Schuld. Ähnlich deutet Bhaskara II eine negative Lösung in einer geometrischen Aufgabe als entgegengesetzt gerichtete Strecke. Dabei wäre es ziemlich sinnlos gewesen, die positiven Lösungen als Zahlen zu bezeichnen, die negativen jedoch nicht.

Intuitiv war man also bereit, die negativen Zahlen als neue Zahlen anzuerkennen. In der offiziellen Theorie hatten sie jedoch keinen Platz, solange man am Zahlbegriff von Simon Stevin festhielt und Zahlen als „Quantitäten“ auffasste. Die negativen Zahlen konnten nicht als Quantitäten gedacht werden, denn sie waren ja – um mit Leibniz zu sprechen – „weniger als nichts“. Dies führte zu einer bloß bedingten Anerkennung in der offiziellen Theorie. Man akzeptierte die negativen Zahlen zwar als Zahlen, nannte sie aber „defekte“, „falsche“, „fingierte“, „ungültige“, „verneinte“, „gedichte“ (= gedachte) und eben „negative“ Zahlen.

Der Gebrauch der negativen Zahlen auf der offiziellen Ebene stärkte jedoch unaufhaltsam die intuitive Auffassung der negativen Zahlen als eigenständige Denkobjekte (neue Zahlen). Die endgültige Anerkennung der negativen Zahlen gelang aber erst im 19. Jahrhundert, als man sich von den verschiedenen Deutungen der Vorzeichen löste und Zahlen allein durch ihre Rechengesetze (also letztlich axiomatisch) charakterisierte. Diese Auffassung von Zahlen geht auf Martin Ohm, Grassmann, Hankel, Peacock und andere Mathematiker zurück und war eng mit der Entwicklung der Buchstabenalgebra verbunden. Zwar unterschied Peacock noch eine arithmetische Algebra, in der die Buchstaben ausschließlich positive Zahlen bedeuten, von einer symbolischen Algebra, in der die Symbole auch negative (oder komplexe) Zahlen bedeuten können, aber darin fand er keine Nachfolger. Durch den axiomatischen Zahlbegriff waren die negativen Zahlen den positiven Zahlen endgültig gleichberechtigt geworden. In der Folgezeit verschwanden auch die Ausdrücke „defekt“, „falsch“ usw. Das Wort „negativ“



behält nur mehr eine technische Bedeutung bei. In **Beispiel 3 (Kasten 1, S. 7)** ist der beschriebene Ablauf schematisch dargestellt.

Entstehung der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen

Im 16. Jahrhundert tauchten Wurzeln aus negativen Zahlen auf. Cardano (1501–1676) stellte die Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 30 ist. Die Aufgabe führt auf eine quadratische Gleichung und die formale Anwendung der Lösungsformel für solche Gleichungen liefert die Ausdrücke $5 + \sqrt{-5}$ und $5 - \sqrt{-5}$. Cardano konnte diesen Ausdrücken keinen Sinn beilegen und nannte sie „sophistische“ Ausdrücke. Er bemerkte aber, dass diese Ausdrücke die Probe bestehen, wenn man formal nach den üblichen Rechenregeln rechnet. Denn es gilt:

$$(5 + \sqrt{-5}) + (5 - \sqrt{-5}) = 10 \text{ und}$$

$$(5 + \sqrt{-5}) \cdot (5 - \sqrt{-5}) = 5^2 - (-5) = 30.$$

Die „sophistischen“ Ausdrücke waren zwar keine Zahlen, verhielten sich aber wie Zahlen.

Die obige Aufgabenstellung konnte man noch als unsinnig bezeichnen. Cardano bemerkte jedoch, dass man mit den Wurzeln aus negativen Zahlen auch ernsthaftere Probleme lösen kann. Er entwickelte eine Formel zur Lösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$. Dabei können in bestimmten Fällen während der Rechnung Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten, während sich im Endresultat durchaus reelle Lösungen der Gleichung ergeben. Ähnlich wie bei den negativen Zahlen begann man, die Wurzeln aus negativen Zahlen als Zwischenresultate von Gleichungen zu akzeptieren, nicht jedoch als Endresultate. Der Umgang mit diesen Ausdrücken erfolgte eher unreflektiert, sie wurden intuitiv höchstwahrscheinlich als nützlich

che Werkzeuge empfunden. Die Frage, ob sie Zahlen darstellen, wurde eher nicht gestellt.

Da man mit Wurzeln aus negativen Zahlen jedoch rechnen kann und insbesondere Gleichungen lösen und damit verschiedene Probleme bewältigen kann, war eine Reparatur der offiziellen Theorie notwendig. Diese geschah auch hier nicht gleich so, dass der Zahlbereich (reelle Zahlen) erweitert wurde, sondern die Theorie wurde durch einen Zusatzbegriff angereichert, der die Situation retten sollte. Dies war ein erweiterter Vorzeichenbegriff, der von Bombelli (1526–1572) eingeführt wurde. Er fügte den Vorzeichen „plus“ (piu) und „minus“ (meno) noch zwei weitere Vorzeichen hinzu, die in heutiger Notation $+i$ (piu di meno) und $-i$ (meno di meno) entsprechen. Für diese Vorzeichen formulierte er eine ganze Reihe von Vorzeichenregeln:

| | |
|--------------------------------------|------------------------|
| Piu uia piu fa piu | + mal + gibt + |
| Piu uia meno fa meno | + mal – gibt – |
| Piu uia piu di meno fa piu di meno | + mal + i gibt + i |
| Meno uia piu di meno fa meno di meno | – mal + i gibt – i |
| usw. | |

Die große Anzahl an Vorzeichenregeln, die man sich hier merken müsste, war wohl der Grund, warum sich dieser Vorschlag nicht durchsetzte. Immerhin konnte man aber auf diese Weise das Rechnen mit den „sophistischen“ Ausdrücken begründen und es war möglich, sich unter diesen Ausdrücken intuitiv die alten (reellen) Zahlen mit einer zusätzlichen Eigenschaft (erweitertes Vorzeichen) vorzustellen.

In der offiziellen Theorie gab es jedoch keinen Platz für die komplexen Zahlen. Entsprechend dem Stevinschen Zahlbegriff konnten sie nicht wie die positiven reellen Zahlen als „Quantitäten“ gedeutet werden, da es nicht gelang, für sie eine Ordnung zu definieren. Aus diesen Gründen war nur eine bedingte Anerkennung der komplexen Zahlen in der Theorie möglich, die sich ähnlich wie bei den negativen und irrationalen Zahlen darin äußerte, dass man die komplexen Zahlen zwar als Zahlen akzeptierte, aber als „sophistische“, „unmögliche“, „falsche“, „eingebildete“, „imaginäre“ Zahlen u.Ä. bezeichnete.

Das beständige Umgehen mit den komplexen Zahlen in der offiziellen Theorie führte jedoch dazu, dass die komplexen Zahlen intuitiv immer stärker als eigenständige Objekte bzw. Zahlen empfunden wurden. Diese Entwicklung wurde vor allem aus drei Quellen gespeist. Die erste Quelle war das Rechnen, wodurch die komplexen Zahlen zu Rechenobjekten wurden. Die zweite Quelle waren theoretische Überlegungen zur Vereinfachung von Sätzen über Gleichungen. So musste man bei der Lösungs-

formel für quadratische Gleichungen nicht mehr voraussetzen, dass die Diskriminante größer oder gleich null ist, wenn man auch Wurzeln aus negativen Zahlen als Zahlen anerkennt. Girard sprach um 1600 den Satz aus, dass jede Gleichung so viele Lösungen besitzt wie ihr Grad beträgt. Dazu muss man natürlich die komplexen Lösungen mitzählen und es hätte wenig Sinn gemacht, die reellen Lösungen als Zahlen, die komplexen Lösungen jedoch nicht als Zahlen anzusehen. Die dritte Quelle war die Veranschaulichung der komplexen Zahlen als Punkte oder Pfeile in der Gauss'schen Zahlenebene, die den komplexen Zahlen viel von ihrem dubiosen Charakter genommen hat.

Die endgültige Anerkennung der komplexen Zahlen in der offiziellen Theorie war wie bei den negativen Zahlen erst möglich, nachdem der Stevinsche Zahlbegriff durch den axiomatischen Zahlbegriff (Ohm und andere) abgelöst wurde. Damit war die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen vollzogen. Die Ausdrücke „sophistisch“, „unmöglich“ usw. verschwanden wieder. Das Wort „imaginär“ behielt nur mehr eine technische Bedeutung bei. In **Beispiel 4 (Kasten 1, S. 7)** ist der beschriebene Ablauf schematisch dargestellt.

Konsequenzen für den Mathematikunterricht

Was war diesen Entwicklungen gemeinsam? Vergleicht man die schematischen Darstellungen der verschiedenen Zahlbereichserweiterungen in Kasten 1 miteinander, so lässt sich erkennen, dass alle Zahlbereichserweiterungen nach dem gleichen Schema abgelaufen sind (s. **Abb. 2**). Der Weg von einem formalen Auftreten der neuen Objekte in der mathematischen Theorie bis hin zu der Anerkennung als Zahlen fand stets im Wechselspiel mit der weiteren Ausprägung der intuitiven Vorstellungen zu diesen Objekten statt.

Die vorgestellten schematischen Darstellungen der Zahlbereichserweiterungen sind modellhafte Darstellungen des historischen Prozesses. Das bedeutet notgedrungen eine starke Vereinfachung unter Weglassung vieler Details. Noch dazu handelt es sich um eine spezielle Betrachtung unter einem didaktischen Blickwinkel, was die Hervorhebung mancher Aspekte begünstigt und anderer erschwert. Klarerweise hat es bei den einzelnen Zahlbereichserweiterungen auch Unterschiede gegeben, die hier vernachlässigt wurden. Ein Vorteil dieser modellhaften Beschreibung liegt aber darin, dass sie Gemeinsamkeiten an den einzelnen Zahlbereichserweiterungsprozessen deutlich hervortreten lässt, die von didaktischem Interesse sein können. Zweierlei ist deutlich zu sehen:

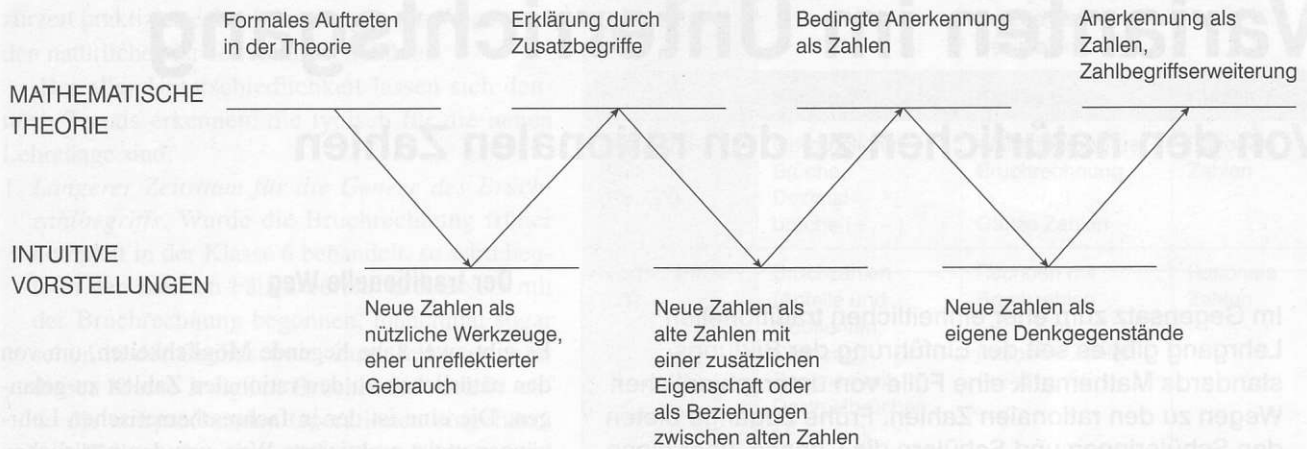


Abb. 2: Entstehung neuer Zahlen aus alten Zahlen

1. Zahlbereichserweiterungen waren stets länger andauernde Prozesse, bei denen verschiedene Etappen durchlaufen wurden.
2. Der Motor dieser Entwicklungsprozesse war eine andauernde Diskrepanz zwischen der offiziellen mathematischen Theorie und den dahinter liegenden intuitiven Vorstellungen, wobei diese beiden Ebenen verändernd aufeinander einwirkten.

Diese beiden Feststellungen lassen sich meines Erachtens auch auf die Lernprozesse unserer Schülerinnen und Schüler übertragen. Um ein Missverständnis gleich auszuräumen, sei betont: Ich behaupte nicht, dass die bei den Schülerinnen und Schülern ablaufenden Entwicklungsprozesse in allen Details den historischen Prozessen gleichen bzw. gleichen sollten. Ich behaupte auch nicht, dass der Unterricht in allen Details dem historischen Vorbild folgen müsse. Ich glaube aber, dass gewisse Schritte der historischen Prozesse auch bei individuellen Lernprozessen eine Rolle spielen, wenn man das Ziel erreichen will, dass die Lernenden die jeweils neuen Zahlen als *eigenständige Objekte ihres Denkens bilden* und deren *Existenz ohne Vorbehalte anerkennen*.

Es kommt dabei gar nicht darauf an, alle Schritte des historischen Prozesses nachzuspielen. Einzelne Schritte können durchaus ausgelassen oder durch Anderes ersetzt werden. Die Geschichte spielt in erster Linie die Rolle eines Anregers. Was sinnvollerweise aufgegriffen wird, ist bei den einzelnen Zahlbereichserweiterungen durchaus unterschiedlich. Zum Beispiel ist die Erklärung durch einen Zusatzbegriff bei den negativen Zahlen ein wichtiger und kaum zu umgehender Schritt im Lernprozess, weil er zu einer Auffassung der negativen Zahlen führt, die dem Alltagsverständnis der negativen Zahlen entspricht (negative Zahlen als positive Zahlen mit einer zusätzlichen Deutung). Bei den anderen Zahlbereichserweiterungen stellt dieser Schritt

eher eine historische Sackgasse dar und wird im Unterricht wohl weggelassen werden müssen. Aus der Geschichte ergeben sich jedoch manchmal Hinweise, die möglicherweise didaktisch relevant sind. Zum Beispiel erscheint es durchaus überlegenswert, Verhältnisse als Vorstufe zu den Bruchzahlen zu behandeln, was im Unterricht eher selten geschieht (siehe dazu Führer 2004). Das Stadium der bedingten Anerkennung der neuen Zahlen, das in der Geschichte regelmäßig aufgetreten ist, wird im Unterricht meist unterdrückt. Es wird von Anfang an so getan, als ob den neuen Zahlen nichts Mysteriöses anhaften würde. Empirische Untersuchungen zeigen aber, dass die Lernenden dies durchaus anders sehen und die neuen Zahlen häufig mit Skepsis betrachten, auch wenn sie dies nicht artikulieren. Ich plädiere dafür, einen gewissen Schwebezustand im Unterricht durchaus eine Weile aufrecht zu erhalten, bis durch Gewöhnung und Anderes eine vollständige Akzeptanz der neuen Zahlen erreicht ist. Empirische Befunde zeigen übrigens, dass etliche Schüler das gesteckte Ziel nicht erreichen, sondern irgendwo im Verlauf des Prozesses stecken bleiben.

Dass die Geschichte wertvolle Anregungen für den Unterricht liefern kann, wird in zwei nachfolgenden Artikeln dieses Heftes detaillierter ausgeführt, nämlich in einem Beitrag zur Entwicklung der negativen Zahlen (Seite 52) und einem zur Entwicklung der komplexen Zahlen (Seite 60).

Anmerkung

1 Dieses einfache Beschreibungsmodell geht in seinen Grundzügen auf Fischbein 1987 zurück.

Literatur

Malle, G.: Untersuchungen zum Zahlbegriff. – Unveröffentlichtes Manuskript, Universität Klagenfurt 1984.
 Fischbein, E.: Intuition in Science and Mathematics. – Reidel & Co., Dordrecht 1987.
 Führer, L.: Verhältnisse. – In: mathematik lehren, Heft 123, Friedrich Verlag, Seelze 2004. S. 46–50.