

**TH-2 16. Übungsblatt Mathematik**

*Übungen dienen zur Vorbereitung auf die dritte Klausur*

## Komplexe Zahlen

**Aufgabe 106.** (*Binomische Gleichung*)

Gegeben sei die binomische Gleichung  $z^4 = 24i$ .

- (i) Berechnen Sie alle Werte von  $z$  und zeichnen Sie alle Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

**Aufgabe 107.** (*Potenzen*)

Berechnen Sie

- (i)  $(-\sqrt{3} + i)^7$  und  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)^6$ .

**Aufgabe 108.** (*Komplexe Gleichungen*)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

- (i)  $z^4 + (1 - i)z^2 - i = 0$ .  
(ii)  $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0$  wobei eine Lösung  $x_1 = 1 + i$  bekannt sei.

## Matrizen

**Aufgabe 109.** (*Symmetrische Matrix / Dreiecksmatrix*)

Schreiben Sie je ein Beispiel für

- (i) eine dreireihige symmetrische Matrix.  
(ii) eine dreireihige schiefsymmetrische Matrix.  
(iii) eine Dreiecksmatrix vom Typ  $(4, 4)$ .  
(iv) eine Diagonalmatrix vom Typ  $(5, 5)$ .  
(v) eine Einheitsmatrix.  
(vi) eine Nullmatrix.  
(vii) eine orthogonale Matrix.  
(viii) eine reguläre Matrix.  
(ix) eine singuläre Matrix.  
(x) zwei linear abhängige Vektoren der Länge 3.  
(xi) zwei linear unabhängige Vektoren der Länge 3.

**Aufgabe 110.** (*Matrixmultiplikation, Determinante I, Rang I, Inverse*)

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2-t & t \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- (i) Sei  $t = 0$ . Berechnen Sie  $A^2 = A \cdot A$ ,  $A \cdot A^T$  und  $A^T A$ . Was fällt Ihnen auf?
- (ii) Berechnen Sie die Determinante und den Rang von  $A$ . Was fällt Ihnen auf?
- (iii) Für welche Werte  $t$  ist  $A$  invertierbar?
- (iv) Berechnen Sie die Inverse in Abhängigkeit für  $t = 0$ .

**Aufgabe 111.** (*Determinante II*)

Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2+t & t \\ 5 & 4 & 11 & 6 \\ 8 & t & 17 & 9 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 112.** (*Rang einer Matrix II*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ t & 4 & 10 & 11 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- (i) Bestimmen Sie die Determinante  $|A|$ . Ist diese Abhängig von  $t$ ?
- (ii) Bestimmen Sie den Rang  $r(A)$ .

**Aufgabe 113.** (*Matrizengleichungen*)

- (i) Bestimmen Sie die Matrix  $X$  aus  $3AX + B^T + C = 2AX + 2BB^{-1}$ .
- (ii) Bestimmen Sie die Matrix  $X$  aus  $A + XB = XC$

(iii) Lösen Sie die Gleichung aus (ii) für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

# Lineare Gleichungssysteme

## Aufgabe 114. (Selber Aufgaben stellen)

Schreiben Sie je ein Beispiel für

- (i) ein homogenes lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten und 4 Gleichungen und
  - (a) einer trivialen Lösung. Lösen Sie es!
  - (b) unendlichen vielen Lösungen, wobei eine Variable frei wählbar ist. Lösen Sie es!
  - (c) unendlichen vielen Lösungen, wobei zwei Variablen frei wählbar sind. Lösen Sie es!
- (ii) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten und 4 Gleichungen. Lösen Sie es!
  - (a) einer trivialen Lösung. Lösen Sie es!
  - (b) unendlichen vielen Lösungen, wobei eine Variable frei wählbar ist. Lösen Sie es!
  - (c) unendlichen vielen Lösungen, wobei zwei Variablen frei wählbar sind. Lösen Sie es!

## Aufgabe 115. (Inhomogenes lineares Gleichungssystem, ohne Parameter)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 8 & -2 & 4 & 12 \\ 6 & 4 & -6 & 22 \\ 9 & -2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix in zeilenstufenform.
- (ii) Untersuchen Sie das Gleichungssystem mit dem Rangkriterium auf Lösbarkeit
- (iii) Ermitteln Sie alle Lösungen (falls welche existieren).

## Aufgabe 116. (Inhomogenes lineares Gleichungssystem, ohne Parameter)

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 55 \\ -76 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 117. (Homogenes lineares Gleichungssystem, mit Parameter)

Sei  $Ax = 0$  ein lineares Gleichungssystem mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}$

- (i) Welche Länge haben der Vektor  $x$  und der Nullvektor  $0$ ?
- (ii) Für welche reellen Zahlen  $a$  ist das System
  - (a) eindeutig lösbar?
  - (b) nicht eindeutig lösbar?
  - (c) nicht lösbar?
- (iii) Bestimmen Sie die Lösungen, falls möglich.

**Aufgabe 118.** (*Homogenes lineares Gleichungssystem, mit Parameter*)

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -8 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 119.** (*Inhomogenes lineares Gleichungssystem, mit zwei Parametern*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & a & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) Für welche Werte  $a, c \in \mathbb{R}$  ist das lineare Gleichungssystem

- (a) eindeutig lösbar
- (b) nicht eindeutig lösbar
- (c) nicht lösbar

(ii) Berechnen Sie die Lösung für  $a = c = 2$ .

**Aufgabe 120.** (*Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen*) (i) Gesucht ist eine zweistellige Zahl.

Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine um 18 kleinere Zahl. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist 12.

(ii) Die Summe zweier Zahlen ist 25. Das Doppelte der ersten Zahl ist gleich dem Dreifachen der zweiten Zahl. Welche Zahlen sind es?