

## TH-2 Übungen zur 1. Klausur

Besprechung am 4. Oktober 2017

**Info:** In der 1. Klausur wird der Stoff bis Abschnitt 3.4 abgefragt. Insbesondere sollten Sie sich mit allen behandelten Übungsaufgaben vertraut machen. In der Klausur werden Punkte nur verteilt, wenn der Rechenweg ersichtlich und nachvollziehbar ist. Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung!

### Aufgabe 26. (Mengen, Abschnitt 1.1)

Eine Gruppe von 135 Personen wurde gefragt, welche Zeitung sie lesen. 80 Personen lesen Zeitung  $A$ , 75 Personen lesen Zeitung  $B$  und 65 Personen lesen Zeitung  $C$ . 31 Personen lesen die Zeitungen  $A$  und  $B$ , 41 Personen lesen die Zeitungen  $B$  und  $C$  und 35 Personen lesen die Zeitungen  $A$  und  $C$ .

- (i) Stellen Sie die Zusammenhänge in einem Venn-Diagramm dar.
- (ii) Wie viele Personen lesen die Zeitungen  $A, B$  und  $C$ ?
- (iii) Wie viele Personen lesen nur die Zeitung  $A$ ?
- (iv) Wie viele Personen lesen keine Zeitung?

### Aufgabe 27. (Aussagenlogik, Abschnitt 1.1)

Wir haben zwei Aussagen gegeben:

- $A$  :  $x$  ist durch 4 teilbar
- $B$  :  $x$  ist durch 5 teilbar
- $C$  :  $x$  ist durch 5 teilbar

Für welche natürlichen Zahlen zwischen 1 und 30 sind die folgenden Verknüpfungen wahr?

- (i)  $B \vee (\neg A \wedge C)$
- (ii)  $\neg(A \vee B) \wedge C$

### Aufgabe 28. (Rationale Zahlen, Abschnitt 1.4)

Die Zahl  $z = 7,6143143143\dots$  ist ein unendlich-periodischer Dezimalbruch.

- (i) Ist  $z$  als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar? Warum?
- (ii) Falls ja, stellen Sie  $z$  als Quotient zweier ganzer Zahlen dar.

### Aufgabe 29. (Wuzel- und Potenzgesetze, Abschnitt 1.5)

Berechnen und vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(i)  $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} \sqrt{\frac{b^3}{a}} \sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$

(ii)  $\left(\frac{a}{3} + \frac{b^2}{2}\right)^4$

**Aufgabe 30.** (Logarithmengesetz, Abschnitt 1.5.5)

Leiten Sie die Formel

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

her.

**Aufgabe 31.** (Binomischer Satz 1, Abschnitt 1.5.6) (i) Machen Sie den Nenner rational.

(a)  $\frac{5\sqrt{10+4}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(b)  $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

(c)  $\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$

(ii) Entwickeln Sie

(a)  $(2k - 0, 2)^3$

(b)  $\left(2 + \frac{x}{10}\right)^5$

**Aufgabe 32.** (Binomischer Satz 2, Abschnitt 1.5.6)

Erklären Sie in Worten die Summeneigenschaft des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

anhand des Pascal'schen Dreiecks:

$n = 0:$					1
$n = 1:$			1	1	
$n = 2:$		1	2	1	
$n = 3:$	1	3	3	1	
$n = 4:$	1	4	6	4	1

**Aufgabe 33.** (Euklidischer Algorithmus 1, Abschnitt 1.6)

Berechnen Sie den kleinsten Hauptnenner für die Brüche  $\frac{1}{306}$ ,  $\frac{1}{680}$  und  $\frac{1}{468}$ .

**Aufgabe 34.** (Euklidischer Algorithmus 2, Abschnitt 1.6)

Eine Zahl  $v \in \mathbb{Z}$  heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* zweier Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , falls gilt:

- $a \mid v$  und  $b \mid v$ ,
- ist  $c \in \mathbb{Z}$  eine weitere Zahl mit  $a \mid c$  und  $b \mid c$ , so folgt  $v \mid c$ ,
- $v \in \mathbb{N}$ .

Es wird  $\text{kgV}(a, b) = 0$  gesetzt, falls  $a = 0$  oder  $b = 0$ .

(i) Zeigen Sie für alle  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  $\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = ab$ .

(ii) Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von 306 und 680.

**Aufgabe 35.** (*Fundamentalsatz der Algebra, Abschnitt 2.2.1*)

Schreiben Sie die gebrochenrationale Gleichung

$$G : x^3 + 6x^2 + 3x - 10$$

in der Produktdarstellung  $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$ .

**Aufgabe 36.** (*Wurzelsatz von Vieta*)

**Aufgabe 37.** (*Intervalle, Abschnitt 2.4*)

Gegeben seien die Intervalle  $I_1 = [2, 4]$  und  $I_2 = [4, \infty)$ . Wir definieren die *symmetrische Differenz*

$$I_1 \Delta I_2 := \{x \mid (x \in I_1 \wedge x \notin I_2) \vee (x \notin I_1 \wedge x \in I_2)\}.$$

Bestimmen Sie  $I_2 \Delta I_1^c$ .

**Aufgabe 38.** (*Bestimmungsgleichungen, Abschnitt 2.2*)

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen nach  $x$  auf.

(i)  $\frac{x - \sqrt{a}}{x - \sqrt{b}} = \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{b}}$

(ii)  $7 + 3\sqrt{2x + 4} = 16$

(iii)  $\sqrt{3 - x} = 3 - \sqrt{x - 4}$

(iv)  $20^4 = e^x$

(v)  $\lg 5^x = \lg 2^x + 2$

(vi)  $\frac{2x+1}{x-3} < 1$

(vii)  $\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1$

**Aufgabe 39.** (*Darstellungsarten von Funktionen 1, Abschnitt 3.2.1*)

Für die folgenden Funktionen mit Parameterdarstellung ist eine parameterfreie Gleichung herzuleiten.

(i)  $\phi(t) = x = 6t, \psi(t) = y = 4t^2$

(ii)  $\phi(t) = x = \frac{1}{1+t}, \psi(t) = y = \frac{t}{1+t}$

**Aufgabe 40.** (*Darstellungsarten von Funktionen 2, Abschnitt 3.2.1*)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 2 - |1 - x| - |x + 2|.$$

Formen Sie die Funktionsgleichung so um, dass keine Beträge mehr auftauchen.

*Tipp:* Analytisch: Finden Sie zunächst die Punkte  $x$ , in denen die Terme innerhalb der Betragsstriche das Vorzeichen wechseln.

Graphisch: Sie können die Aufgabe auch graphisch lösen, indem Sie den Graph der Funktion  $f$  zeichnen.

**Aufgabe 41.** (*gerade/ungerade Funktionen, Abschnitt 3.3*) (i) Der Quotient zweier gerader Funktionen ist wieder gerade. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussage.

(ii) Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist gerade. Richtig oder falsch? Begründen Sie ihre Aussage.

**Aufgabe 42.** (*gerade/ungerade/periodische Funktionen, Abschnitt 3.3*)

Setzen Sie den Graph in der Abbildung so fort, dass

(i) eine gerade Funktion  $f_1$

(ii) eine ungerade Funktion  $f_2$

(iii) eine periodische Funktion  $f_3$

entsteht.

